ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2005-2006

Complementi ed esercizi sulle serie di Fourier

Convergenza in L^2.

Sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ e siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier. Proviamo che la serie di Fourier di f è convergente in L^2.

Per questo, ricordando la completezza di L^2, è sufficiente provare che la successione delle ridotte

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

è di Cauchy in $L^2[-\pi, \pi]$. Ricordando il teorema di Pitagora si ha, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ (il caso $m \leq n$ è simmetrico),

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \pi \sum_{k=n}^{m} |a_k|^2 + |b_k|^2. \tag{1}$$

Per la disuguaglianza di Bessel (formula (9') a p. 75 del testo), la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2$$

è convergente, per cui la successione delle ridotte $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2\right)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Da ciò e da (1) segue immediatamente che la successione s_n è di Cauchy in $L^2(\pi, \pi)$.

In realtà la serie di Fourier di f converge proprio a f in L^2. La dimostrazione di quest'ultimo fatto, il più importante, non è immediata e si omette.

1) Delle seguenti funzioni, calcolare i coefficienti di Fourier e trovarne l'ordine di infinitesimo, studiare la convergenza e la convergenza totale della serie e scrivere l'identità di Parseval, deducendone il valore della somma della relativa serie.

1. $f(x) = \sinh x, \ x \in [-\pi, \pi]$,
2. $f(x) = x^3, \ x \in [-1/2, 1/2]$,
3. $f(x) = |x|^3, \ x \in [-1, 1]$.

2) Si consideri la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1$ per $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = -1/2$ per $1 < x \leq 2$. Si costruiscano la prolungata periodica pari e la prolungata periodica dispari di f e di $|f|$. Si calcolino poi i coefficienti di Fourier di tali quattro funzioni e si studi la convergenza delle serie relative nel punto $x = -1$.

3) Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ per $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 1$ per $1 < x \leq \pi - 1$, $f(x) = \pi - x$ per $\pi - 1 < x \leq \pi$.

Si costruisca la prolungata periodica dispari di f. Si calcolino poi i coefficienti di Fourier di tale funzione e si studi la convergenza delle serie in $\mathbb{R}$.
Si calcolino inoltre i coefficienti di Fourier di f' e si studi la convergenza della relativa serie in $\mathbb{R}$.
Risultato:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)}{(2k-1)^2}\sin((2k-1)x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)}{2k-1}\cos((2k-1)x)$$

(per calcolare i coefficienti di quest'ultima serie non occorre effettuare integrali...; si osservi anche che la sua convergenza è un risultato per nulla banale; in particolare, a cosa converge per $x = (\pi-1)/2$?)

4) Sfruttando opportunamente lo sviluppo di Fourier di x in $[-\pi, \pi]$, calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

5) (Dal compito del 16.12.2004) Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - x, \qquad x \in [0, 3].$$

a) Si dica se la serie di Fourier della prolungata dispari 6-periodica f_d di f converge uniformemente a f_d in $\mathbb{R}$; stessa domanda per la prolungata pari f_p.
b) Si calcolino i coefficienti di Fourier della prolungata pari f_p di f.
c) Se ne deduca la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{3}.$$

6) (Dal compito del 20.9.2005) Si consideri la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -1 \le x \le 0, \\ x/2 & \text{per } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

a. Si calcolino i coefficienti di Fourier di f;

b. si studino la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier di f in $\mathbb{R}$;

c. se ne deduca la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$