

ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2005-2006

Esercizi sugli spazi normati e la teoria della misura

1. Esercizi sugli spazi normati

1) Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata. Si provi che il funzionale lineare

$$I_g : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx$$

è continuo.

2) Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{y} = 2y, \quad y(0) = \xi \in \mathbb{R}$$

e sia y_ξ la sua soluzione. Si provi che la funzione (lineare)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]), \quad f(\xi) = y_\xi$$

è continua (in $\mathcal{C}([0, 1])$ si consideri la norma $\|\cdot\|_\infty$).

3) Sia X uno spazio di Hilbert e sia $v \in X$. Si provi che la funzione (lineare)

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x | v)$$

è continua.

4) (Dal compito del 11.1.2005) Si consideri la funzione f così definita: per ogni $x \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $f(x)(\cdot)$ è la funzione

$$t \mapsto \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}} ds, \quad t \in [0, 1].$$

Si provi che

- (i) per ogni $x \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $f(x)(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0, 1])$;
- (ii) $f : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$ è lineare e continua (in $\mathcal{C}^0([0, 1])$ si consideri la norma del sup).

5) (Dal compito del 7.9.2005) Si consideri la funzione τ così definita: per ogni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τf è la funzione da $(-\pi/2, \pi/2)$ in \mathbb{R} definita da $(\tau f)(x) = f(\tan x)$. Si provi che:

- (i) se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\tau f \in L^1(-\pi/2, \pi/2)$,
- (ii) $\tau : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(-\pi/2, \pi/2)$ è lineare e continua.

6) Si consideri la funzione f così definita: per ogni $x \in L^2([0, 1])$, $f(x)(\cdot)$ è la funzione

$$t \mapsto \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}} ds, \quad t \in [0, 1].$$

Si provi che

- (i) per ogni $x \in L^2([0, 1])$, $f(x)(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0, 1])$;
- (ii) $f : L^2([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$ è lineare e continua (in $\mathcal{C}^0([0, 1])$ si consideri la norma del sup).

7) Si segnalano gli esercizi 1.2-3, 1.2-8, 1.2-12, 1.2-14, 1.2-18, 1.2-19 alle pagine 19, 20 e 21 del testo.

2. Esercizi sulla sommabilità

1) Studiare la sommabilità in \mathbb{R}^2 delle seguenti funzioni e calcolarne l'integrale:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{1 + e^{x^2} e^{|y|}},$$

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + |x|^5 + y^2} \quad (\text{della stessa natura del precedente})$$

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

(passare a coordinate polari e usare il teor. di Beppo Levi).

2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\}$ e

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Studiare la sommabilità di f in A per $n = 2$ e $n = 3$ e calcolarne l'integrale. (Passare a coordinate polari e usare il teor. di Beppo Levi).

3) Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ e

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Studiare la sommabilità di f in B per $n = 2$ e $n = 3$ e calcolarne l'integrale. (Passare a coordinate polari e usare il teor. di Beppo Levi).

4) (Dal compito del 16.12.2004) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^5}{1 + y^2 e^{2|x|}}.$$

a) Si provi che f è sommabile in \mathbb{R}^2 ;

b) si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$.

5) (Dal compito del 20.9.2005) Si provi che la funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 y) e^{-(x^2 + y^2)}$$

è sommabile in \mathbb{R}^2 e si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$.

6) Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx \sin(n^2 x^2 e^{nx^2})}{1 + n^2 x^2} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sin(n^2 x^2) e^{-n^2 x^2} dx.$$

7) Si segnalano gli esercizi 2.2-4, 2.2-5, 2.2-6, 2.2-8 e 2.2-9 alle pagine 60 e 61 del testo.