MATEMATICA A, Esercizi di autovalutazione, 5
(giustificare le risposte)

Vicenza, novembre 2006.

Esercizi sugli integrali e sugli integrali impropri

1. Per $x > 0$ si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{2 + \sin\sqrt{|t|}}{|t|^{1/3}}\, dt.$$

i) Dire se F si prolunga per continuità in $x = 0$. ii) Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. iii) Calcolare $F'(1)$. iii) Dire se F è invertibile in $]0, +\infty[$ e in caso affermativo calcolare $D[F^{-1}](0)$.

2. Data la funzione integrale

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sinh(t^3)}{5 + t^4}\, dt$$

i) determinare l'ordine di infinitesimo di g per $x \to 0^+$ (significa: determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = L$, con L numero reale non nullo.)
ii) Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e il $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
iii) Scrivere due termini non nulli dello sviluppo di Mac-Laurin di g.

3. Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\, dx.$$

4. Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha(x + 2)}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx.$$

Raccolta di esercizi da appelli

1 *(a)* Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale seguente:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x^\alpha \sin(x^2) + |\log(x^{\alpha-1})|}{(1 - \cos(x^2))^{\frac{7}{8}\alpha}}\, dx$$

e giustificare la risposta.

(b) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

2 Determinare la primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{2(1+\sin^2 x)} & x \leq 0 \\[2ex] \frac{x+1}{2x^2+5x+2} & x > 0, \end{cases}$$

tale che $F(1) = 0$.

3 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$ per i quali è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sinh x - \alpha \sin x|}{x^2 \beta^x}\, dx.$$

4 Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \left[\log(1+t^2) - \arctan(t^a)\right]\, dt,$$

(a) calcolare al variare del parametro $a > 0$ il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x^3}.$$

(b) Calcolare il valore $F(1)$ per $a = 1$.