Lezione del 10 Novembre

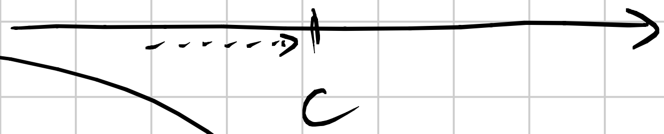
Definizione topologica di limite di funzione

$c, \ell \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \iff \forall\, U_\ell$ intorno di ℓ $\exists\, V_c$ intorno di c t.c. $f(x) \in U_\ell$ $\forall x \in V_c,\ x \neq c.$

Definizione di limite di funzione attraverso il limite di successioni

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$



x_n successione t.c. $x_n \to c$ $\quad n \to +\infty$

$$\underbrace{f(x_n)}_{a_n \text{ successione}} \longrightarrow \ell$$

$n \to +\infty$

e $x_n \to c$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \iff \forall \{x_n\} \text{ t.c. } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$$

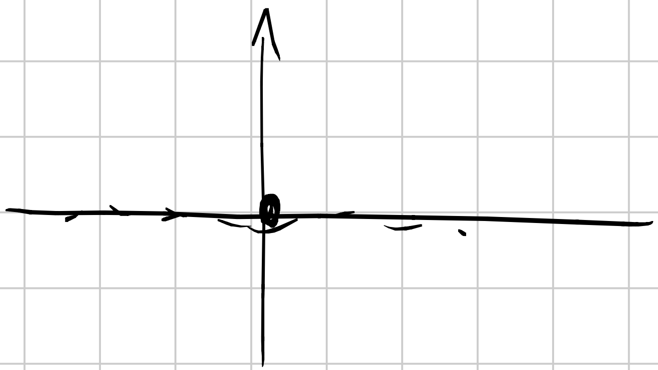
si ha

$$\lim_n f(x_n) = \ell$$

<u>oss.</u> bisogna verificarlo $\forall$ successione $\{x_n\}$ $x_n \to c$

<u>es.</u> $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \forall \; x_n \to 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x_n) \to 0$



la def.
non è molto utile
per verificare un limite
di funzione

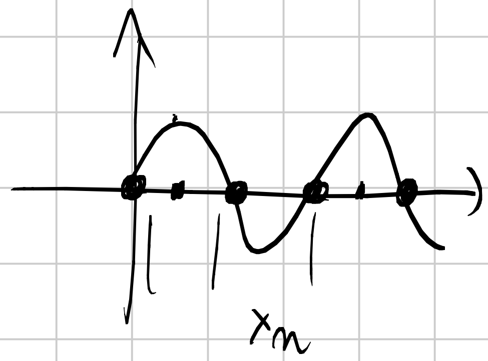
ma è utile

1) per dimostrare che una funzione non ha limite.

es. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \nexists$

sup. che esista $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = l$

$\forall x_n \to +\infty$ $\operatorname{sen} x_n \to l$ (deve essere)



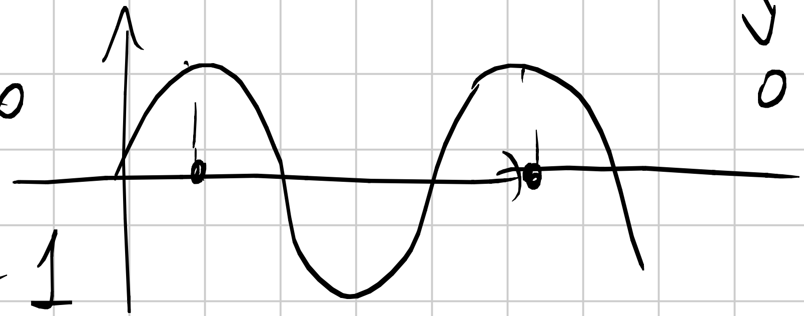
Ora trovo

$x_n \to +\infty \qquad \operatorname{sen}(x_n) \to l_1 \qquad l_1 \neq l_2$

$y_n \to +\infty \qquad \operatorname{sen}(y_n) \to l_2$

$x_n = 2n\pi \to +\infty \qquad \operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0 \to 0$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$



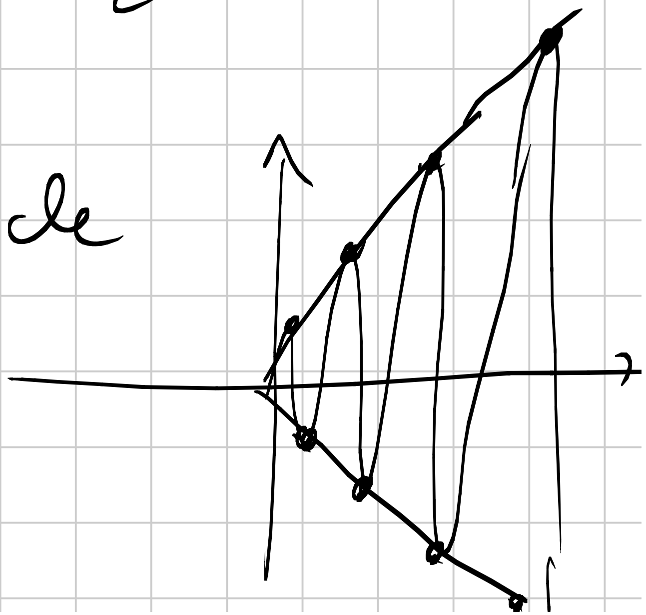
$\operatorname{sen}(y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$

Quindi per dimostrare che una funzione $f(x)$ non ha limite per $x \to c$ basta trovare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ entrambe che tendono a c ma tali che la

$$f(x_n) \to l_1 \qquad l_1 \neq l_2$$
$$f(y_n) \to l_2$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} x \quad \nexists$$



$x_n \to +\infty \qquad f(x_n) \to +\infty$

$y_n \to +\infty \qquad f(y_n) \to -\infty$

2) Si ottengono tutti i teoremi sui limiti di funzioni attraverso i teoremi già dimostrati per i limiti di successione.

Es. Teo. (unicità del limite)

Se esiste $\lim_{x \to c} f(x)$, tale limite è unico.

Dim. se fosse $\lim_{x \to c} f(x) = \ell_1 \iff f(x_n) \to \ell_1 \ \forall x_n \to c$

$$\lim_{x \to c} f(x) = l_2 \iff f(x_n) \to l_2 \quad \forall x_n \to c$$

$f(x_n)$ è

una successione che ha
due limiti l_1 e l_2
assurdo perché vale l'unicità
del limite per successioni

Analogamente valgono gli altri teoremi per i limiti di funzioni

Teorema del confronto

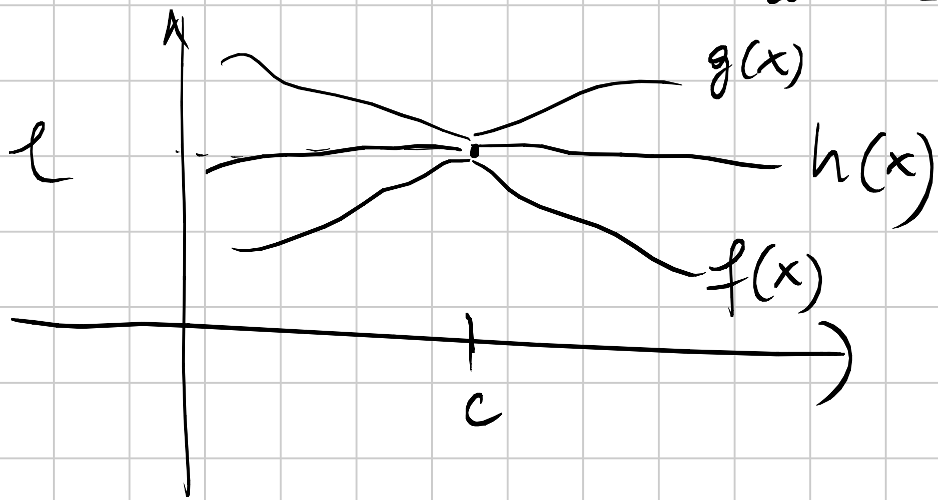
$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

(almeno in un intorno di $x = c$)

$f(x) \xrightarrow[x \to c]{} l$

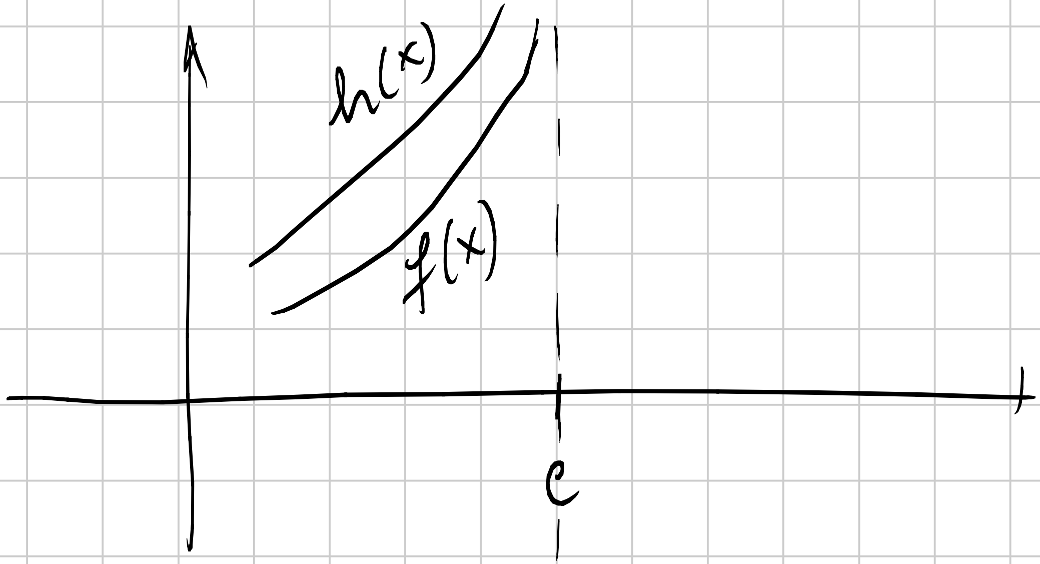
$\Longrightarrow \quad h(x) \xrightarrow[x \to c]{} l$

$g(x) \xrightarrow[x \to c]{} l$



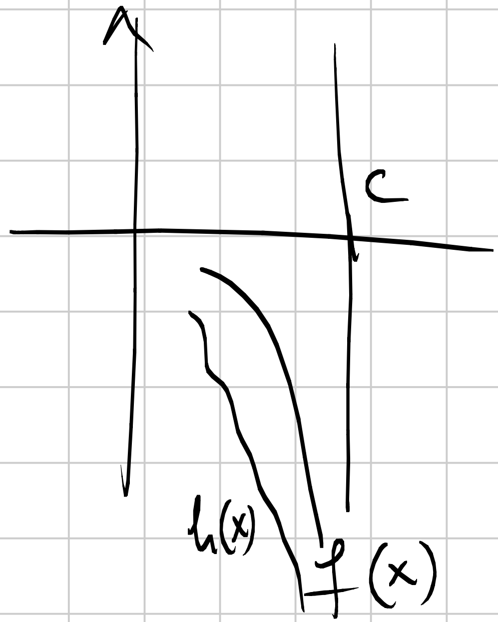
<u>oss.</u> Se $f(x) \leq h(x)$ e $f(x) \xrightarrow[x \to c]{} +\infty$

$\Longrightarrow \quad h(x) \to +\infty \quad x \to c$



e analogamente se $f(x) \to -\infty$

$h(x) \leq f(x)$



- $|h(x)| \leq g(x)$ $\quad \lim_{x \to c} g(x) \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} h(x) \to 0$

- $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x \to c]{} 0$ se $f(x) \xrightarrow[x \to c]{} 0$
e $g(x)$ limitata

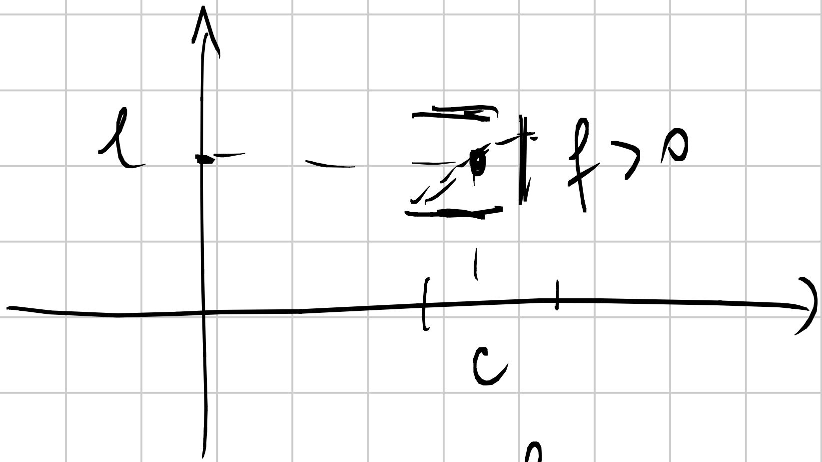
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\text{limitata}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} |x|^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Teorema della permanenza del segno

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \quad , \quad \ell > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$$

in un intorno di $x = c$



($\exists$ un intorno U_c t.c. $f(x) > 0$, $\forall x \in U_c$)

(oppure se $f(x) \geq 0$ in un intorno di $x = c$ $\Rightarrow \ell \geq 0$)

e inoltre valgono tutti i teoremi per le operazioni sui limiti

Algebra dei limiti

$x \to c$

$f(x) \to l_1$

$g(x) \to l_2$

$f \pm g \to l_1 \pm l_2$

$f \cdot g \to l_1 \cdot l_2$

$\frac{f}{g} \to \frac{l_1}{l_2}$ se $g(x) \neq 0$ in un intorno di $x=c$ e $l_2 \neq 0$

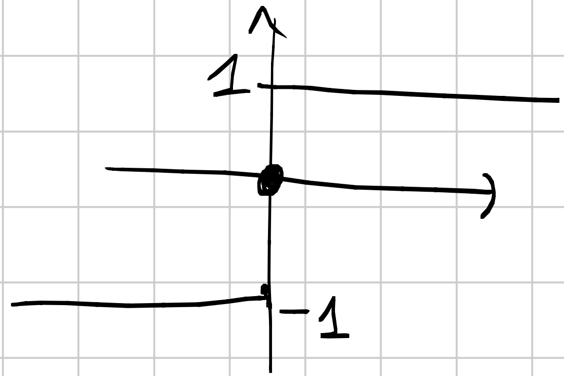
e anche nei casi infiniti fatti per le successioni

- - - - . .

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty} - \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\substack{\nexists \\ \text{ma è} \\ \text{limitata}}} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \underbrace{-3}_{-3} = +\infty$$

Definizione di limite destro e limite sinistro

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

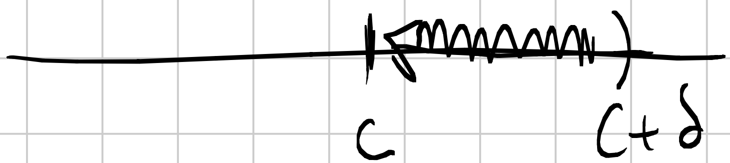


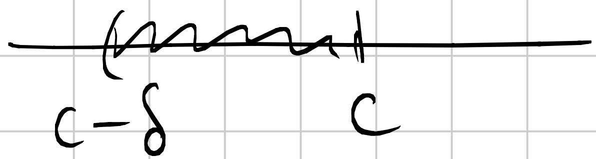
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x \quad ?$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.}$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x : c < x < c + \delta$$

limite <u>destro</u>





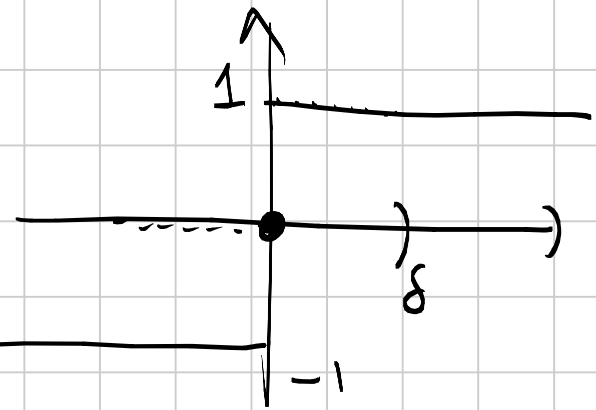
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.}$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \quad c - \delta < x < c$$

limite <u>sinistro</u>

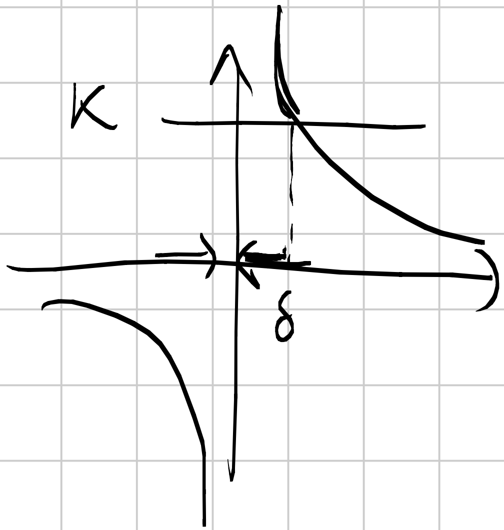
$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1 \neq f(0) = 0$$



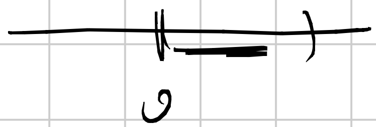
$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \neq f(0) = 0$$

<u>es.</u>

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



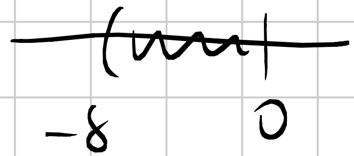
$\downarrow \quad \forall K > 0 \ \exists \delta$ t.c. $f(x) > K$

$\forall \ 0 < x < \delta$

$x > 0$

$x < \dfrac{1}{K} \qquad \dfrac{1}{x} > K$

$\delta = 1/K$



P.C. $\quad x < 0 \quad \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

<u>Prop.</u> $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste $= \ell \iff \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$

$\Leftarrow$

La proposizione è utile per dim. che il limite di $f(x)$ per $x \to c$ <u>non esiste</u>

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x \quad \nexists$ perché il limite dx è diverso dal limite sx

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$$

Applicazione f definita in (a,b)

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x)$$

Definizione di funzione continua

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo , $c \in I$,

f è <u>continua</u> in c se esiste

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

se è continua $\forall\, c \in I \Rightarrow f$ è continua in I

se non è continua in $c \in I \Rightarrow$ discontinua

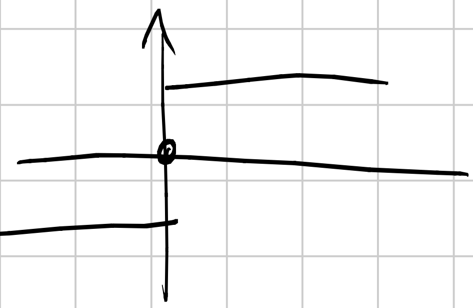
<u>Es.</u> $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen}(0)$

sen x è continua in $x = 0$

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 1 \quad \ldots$$

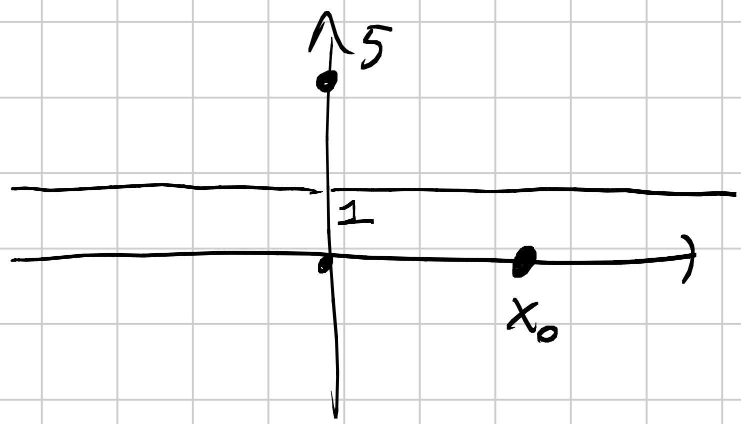
$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

es. $\operatorname{sgn} x$



non è continua in $x=0$ perché $\nexists$ il $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$

es. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 5$$

non è continua in $x = 0$

è continua negli altri punti ? $x \neq 0$

sì!

$f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

$f(x) = \operatorname{sgn} x$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

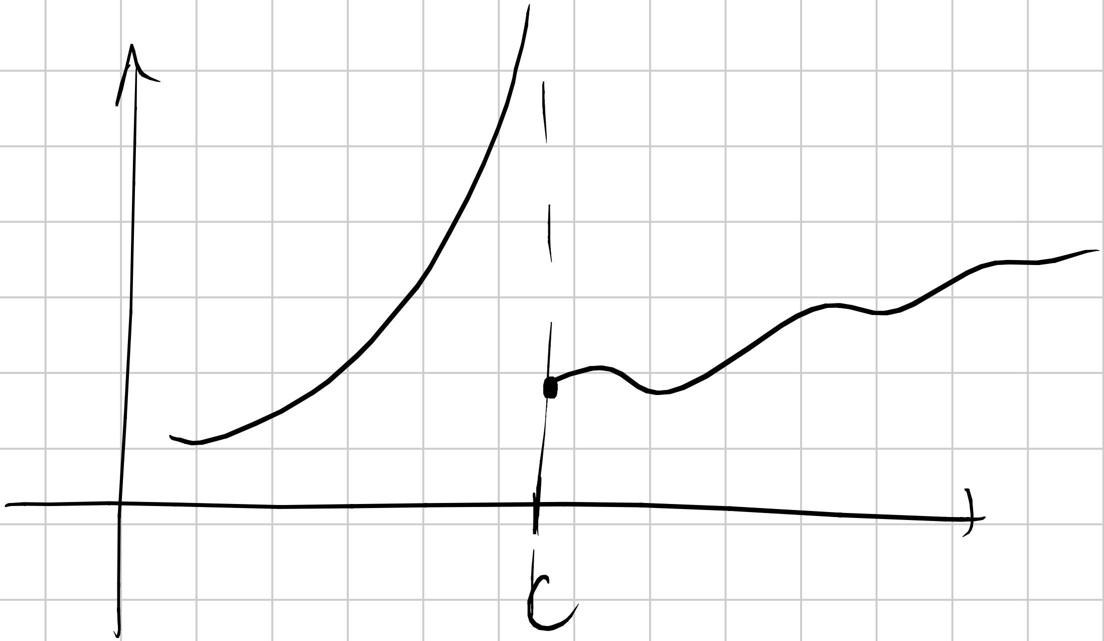
f non è continua in $x=0$ ma esistono finiti il limite dx e sx

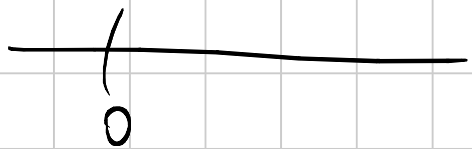
Def. Se $\lim_{x \to c^\pm} f(x)$ esistono finiti e sono diversi si dice che $f(x)$ ha una discontinuità di salto in $x=c$ e

$$\text{salto} = \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x)$$

$f(x) = \operatorname{sgn} x$ salto in $x=0$ $= 2$

- Può succedere che uno dei due limiti (dx o sx) sia $\pm\infty$, si dice che in $x = c$ c'è un asintoto verticale





es. $f(x) = \log x$ def. $x > 0$

ha senso fare solo $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$

ha un asintoto verticale in $x=0$

$\frac{1}{x}$ ha un asintoto verticale in $x=0$

Dalle operazioni sui limiti

f continua in x_0

g continua in x_0

$\Rightarrow f+g$ è continua in x_0

$f-g$ " "

$f \cdot g$ "

f/g " " $g(x_0) \neq 0$

Teo. Tutte le funzioni elementari: potenze x^α, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche sono continue nel loro insieme di definizione.

es. $f(x) = x^2 + 3x - \operatorname{sen} x + e^x$

$D = \mathbb{R}$

$$f(x) = (\log x) \cdot \cos x \cdot x^{\sqrt{2}} \qquad x > 0$$

Continua $\forall x > 0$

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\log x^2\right)$$

es. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} a^{y} = a^{0} = 1$

$\dfrac{1}{x} = y$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$

$g(x) = \dfrac{1}{x}$

$a^{g(x)}$

<u>Teorema</u> (del cambio di variabile nel limite)

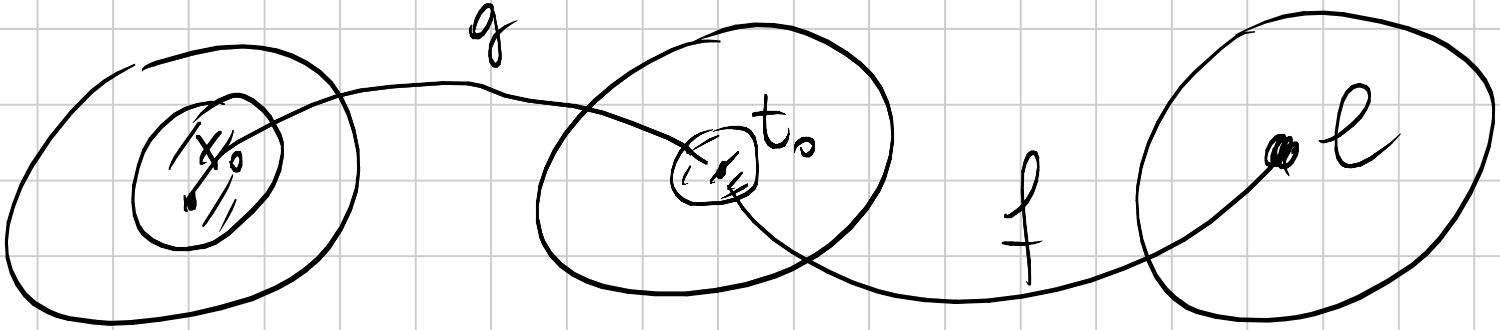
f, g due funzioni t.c. è ben definita la composizione $f \circ g$ e supponiamo che

i) $g(x) \to t_0$, $x \to x_0$ $(x_0 \in \mathbb{R}^*)$

ii) $\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^*$

iii) $g(x) \neq t_0$ $\forall x$ in un intorno di x_0

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t) = \ell$$



$$f \circ g = f(g(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{x \to x_0} \ell$$

il cambio di variabile è

$$t = g(x)$$

<u>es. di prima</u> $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} a^{1/x}$

$a^{1/x}$ $\qquad f(t) = a^t$ $\qquad x \to +\infty$

$t = g(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad t \to 0 = t_0$

$$a^{1/x} = f(g(x)) \qquad \lim_{x \to +\infty} a^{1/x} = \lim_{t \to 0} a^t = 1$$

Dim. $\quad x \to x_0 \Rightarrow g(x) \to t_0$ dalla def. di limite con le successioni

$x_n \to x_0 \qquad g(x_n) \to t_0$

$y_n \to t_0$

dall'ipotesi ii) $\quad f(g(x_n)) \to \ell$

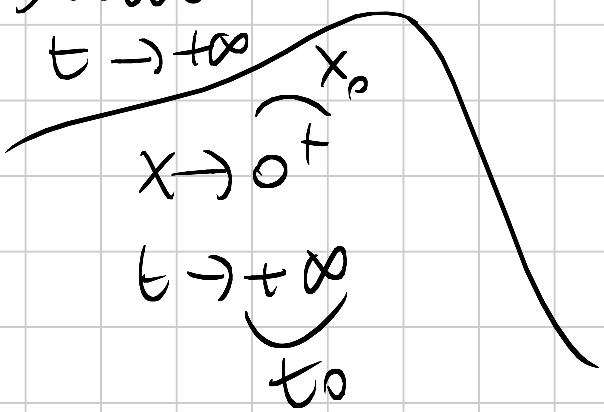
$\forall \; x_n \to x_0 \Rightarrow f(g(x_n)) \to \ell$

che è proprio la def. di limite acc.

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$$

es. $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{sen} t \;\nexists$

$\frac{1}{x} = t \qquad \left(g(x) = \frac{1}{x} \right)$



$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+3x-1}\right) =$$

$$t = \frac{1}{x^2+3x-1} = g(x) \qquad = \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0$$

$x \to +\infty \qquad t \to 0$

Il teorema precedente mi dice che la composizione di funzioni continue in x_0 è una funzione continua.

es. $f(x) = \cosh(\log(x^2+1)) + 5\operatorname{sen}(e^x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

è continua

$\forall x \in \mathbb{R}$

Esercizi su limiti di successioni

- $$\lim_{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

$$\lim_{n} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$a_n \to +\infty$$

- es. $$\lim_{n} \left(1 + \frac{3}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{3}} = e$$

$$a_n = \frac{n^2+1}{3} \longrightarrow +\infty \qquad \left(\frac{1}{\frac{n^2+1}{3}}\right)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

es. $$\lim_n \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

$$\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\right)^{\frac{n}{\alpha}\cdot\alpha} \longrightarrow e^\alpha$$

$\frac{n}{\alpha} \to +\infty$

$\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\right)^{\frac{n}{\alpha}} \to e$

$$\lim_{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}}$$

$$\frac{n+3}{n+4} = \frac{n+4-4+3}{n+4} = \frac{n+4-1}{n+4}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+4}$$

$$\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}} = \left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{\frac{(n+4)}{n+4}\cdot\frac{n^2+7}{2n+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{(n+4)} \to e^{-1}$$

$$\frac{n^2+7}{(n+4)(2n+1)} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim\left(\quad\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

es.

$$\lim_n \left(\frac{n^2 + 3n - 7}{n^2 + 1} \right)^{\log n}$$

$$\frac{n^2 + 3n - 7}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + 1 - 1 + 3n - 7}{n^2+1} =$$

$$= 1 + \frac{3n - 8}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{3n-8}}$$

$$= 1 + \frac{1}{a_n} \qquad a_n \to +\infty$$

$$\left(\frac{n^2+3n-7}{n^2+1}\right)^{\log n} = \left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n-8}}\right)^{\log n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n-8}}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-8}}}_{\to e}{}^{\cdot \underbrace{\frac{3n-8}{n^2+1}\log n}_{\to 0}} \to e^0 = 1$$