# Riassunto della lezione del 11 Gennaio

serie telescopiche

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(b_k - b_{k+1})}_{a_k}$$

In tal caso $\quad s_n = \underbrace{b_0 - \cancel{b_1}}_{a_0} + \underbrace{\cancel{b_1} - \cancel{b_2}}_{a_1} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \dots + \underbrace{\cancel{b_n} - b_{n+1}}_{a_n}$

$$= b_0 - b_{n+1}$$

$\lim_n s_n = b_0 - \lim_n b_{n+1}$ e si calcola esplicitamente il limite di $s_n$.

es. $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ $\qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

es. $\sum \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$ $\qquad \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k$

$$S_n = \log(n+1) \to +\infty$$

Serie a termini non negativi

$\sum a_k \qquad a_k \geq 0$

Proprietà: esiste sempre (finito o infinito) il $\lim_n S_n$.

(la serie non può mai essere irregolare

Dim. $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$ è una successione crescente cioè monotona

#

## Criteri di convergenza per le serie a termini non negativi

Se non si riesce a calcolare $S_n$ dobbiamo avere dei criteri per studiare la convergenza.

### Criterio integrale

- $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ continua e decrescente

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \quad \text{converge}$$

<u>Dim.</u> no.

<u>applicazione</u>: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ converge sse $\alpha > 1$

(serie armonica <u>generalizzata</u>)

applicazione $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\lg k)^{\beta}}$ converge se $\begin{cases} \alpha > 1, \ \forall \beta \\ \alpha = 1, \ \beta > 1 \end{cases}$

# Criterio del confronto

$0 \le a_k \le b_k \quad \Rightarrow \quad \sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge

$\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge

**Dim.** $\quad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

$\Rightarrow \quad 0 \le s_n \le t_n \rightarrow \exists$ limite finito

$s_n \downarrow \exists$ limite

$\Rightarrow \lim_n s_n$ è finito!

#

# Criterio <u>confronto asintotico</u>

$a_k, b_k \geq 0 \quad a_k \underset{k \to +\infty}{\sim} b_k \quad \Rightarrow \sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere

<u>Dim.</u> no.

<u>oss.</u> vale anche di più: se $a_k, b_k \geq 0$ $\quad a_k \to 0$, $b_k \to 0$

e $a_k = o(b_k) \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \sum b_k \text{ converge} \Rightarrow \sum a_k \text{ conv.} \\ \text{se } \sum a_k \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_k \text{ diverge} \end{cases}$

$a_k$ è infinitesimo di ordine superiore a $b_k$.

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}$ $\qquad e^{-k} \sim ?$

ma $\qquad e^{-k} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \to +\infty}$ $\qquad$ poiché $\sum \frac{1}{k^2}$ converge

$\sum e^{-k}$ converge