Lezione del 13 Ottobre

Simbolo di sommatoria

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

somma di n numeri

a_i $\quad i =$ indice di sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots a_n$$

es. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

es. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k =$

$= 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

q^k progressione geometrica

q "ragione" $\quad q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ TS 1 $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{100} 3^k = \frac{1-3^{101}}{1-3}$$

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k \overset{?}{=} 1-q^{n+1}$$ 2

$$(1-q)\left(1+q+q^2+\dots+q^n\right) =$$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots \cancel{} - q^{n+1} =$$

$$= 1 - q^{n+1}$$

$(a+b)^n$

Fattoriale di $n \in \mathbb{N}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \qquad 0! = 1$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$n!$ è il numero di permutazioni di n oggetti distinti

3 oggetti $\quad a, b, c$

a b c $\quad$ a c b $\quad$ b a c $\quad$ b c a

c a b $\quad$ c b a $\qquad 6 = 3! = 2 \cdot 3$

Coefficienti binomiali $\qquad n, k \in \mathbb{N}$

$k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2}} = 3$$

Formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$n = 1 \qquad (a+b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} =$

$$= \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} b + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} a = b + a$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} =$$

$$= \underbrace{\binom{2}{0}}_{=1} b^2 + \underbrace{\binom{2}{1}}_{2} ab + \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} a^2$$

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad 0 \le k \le n$$

triangolo di Tartaglia

$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	$\boxed{1 \quad 2}$		1		$\longrightarrow$
$n=3$	1	3	3	1	$\longrightarrow$
$n=4$	1	4	6	4	1 $\longrightarrow$

Da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono <u>campi</u> <u>ordinati</u>

sono definite due operazioni
(somma e prodotto)
che hanno det. proprietà
commutativa, associativa,
elemento neutro, inverso
e distributiva

è definita
una relazione
d'ordine
$\leq$ che
verifica 3 proprietà
- riflessiva
- antisimmetrica
- transitiva

Per passare da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$
introduciamo il concetto di
estremo superiore di un insieme E

X insieme con una relazione d'ordine
$(X = \mathbb{Q}, \mathbb{R})$

<u>Def.</u> $E \subseteq X$ è limitato <u>superiormente</u>
se $\exists M$ tale che $x \leq M, \forall x \in E$

$E \subseteq X$ è limitato <u>inferiormente</u>
se $\exists m$ t.c. $x \geq m, \forall x \in E$

e E è <u>limitato</u> se è limit. inf. e superiormente.

cioè se $\exists m, M$ t.c.
$$m \leq x \leq M, \quad \forall x \in E$$

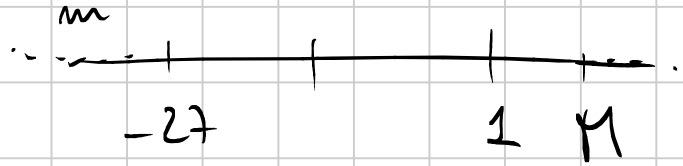
<u>Es.</u> $E = \{ x \in \mathbb{Q} : x < 5 \}$

$M = 5 \quad M = 100 \quad M = 72$
$x \in E$ è limitato superiormente

ma non è limitato inferiormente
e quindi non è limitato

es. $\bar{E} = \{ x \in \mathbb{Q} : -27 < x < 1 \}$

è limitato



$E = \{ x \in \mathbb{R} : \quad 0 < x < 1 \} =: (0,1)$

$\bar{E} = \{ x \in \mathbb{R} : \; 0 \leq x \leq 1 \} =: [0,1]$

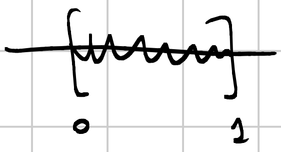
Def. $\bar{x}$ è MASSIMO per E se

i) $\bar{x} \in E$

ii) $x \leq \bar{x}, \quad \forall x \in E$

analogamente per il MINIMO di E.

$\bar{E} = [0,1]$



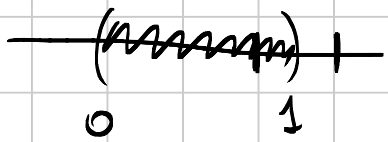
$1 = \max \bar{E}$

i) $1 \in \bar{E}$

ii) $x \leq 1, \ \forall x \in \bar{E}$

$0 = \min \bar{E}$

$E = (0,1)$



non ha massimo e non ha minimo

1) se $\exists$ massimo di E $\Rightarrow$ E è limitato superiormente

$\nLeftarrow$

Def. $E \subseteq X$, $k \in X$ si dice <u>MAGGIORANTE</u> di E se $k \geq x$, $\forall x \in E$.

es. $E = (0,1)$ $E \subseteq \mathbb{R} = X$

tutti i $k \geq 1$ sono maggioranti di E

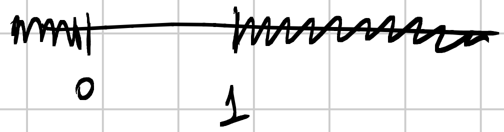
Analogamente $k \in X$ è <u>MINORANTE</u> se $k \leq x$, $\forall x \in E$

tutti i $k \leq 0$ sono minoranti di E

Def. $E \subseteq X$. L'<u>estremo superiore</u> di E ($\sup E$) è il <u>minimo</u> dei <u>maggioranti</u> di E (se esiste)

e l'estremo inferiore di E ($\inf E$) è il <u>massimo dei minoranti</u>.

$E = (0,1)$



$\text{Maggioranti}_{\text{di } E} = \{ k \geq 1 \}$

$\min(\text{Maggioranti}) = 1 = \sup E$

$\text{Minoranti di } E = \{ k \leq 0 \}$

$\max(\text{Minoranti}_{\text{di } E}) = 0 = \inf E$

<u>oss.</u> se E ha massimo questo coincide con l'estremo superiore.

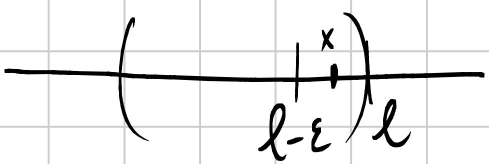
$E = [0,1] \qquad \max E = 1$

Caratterizziamo il sup e l'inf di E.

$E \subseteq \mathbb{R}$

$$\ell = \sup E \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in E \quad x \leq \ell \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \text{ t.c. } x > \ell - \varepsilon \end{cases}$$

($\ell - \varepsilon$ <u>non</u> è un maggiorante di E) $\forall \varepsilon$



Analogamente

$$\ell = \inf E \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in E \quad x \geq \ell \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \text{ t.c. } x < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

($\ell + \varepsilon$ <u>non</u> è un minorante)

__Es.__ $E = \{ x \in \mathbb{R},\ x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$

è limitato.

$0 \quad 1/5 \quad 1/4 \quad 1/3 \quad 1/2 \quad 1$

$\max E = 1 = \bar{x}$

i) $1 \in E$ (prendo $n = 1 \Rightarrow x = 1$)

ii) $1 \geq x, \ \forall x \in E$

? $1 \geq \frac{1}{n}$ $\quad \forall n \geq 1$

$0 = \inf E \qquad \ell = 0$

i) $x \geq 0 \quad \forall x \in E, \quad x = \frac{1}{n}$ sì!

? ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists x \in E}_{x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x < \varepsilon$?

$$x < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\varepsilon = 10$ $\quad n > \frac{1}{10}$

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$

$$E = \{ x \in \mathbb{Q},\ x \geq 0,\ x^2 < 2 \}$$

$$E \subseteq \mathbb{Q}$$

$$x^2 = 2$$

$$\nexists\, x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$$

sup E non esiste in $\mathbb{Q}$

ma esiste in $\mathbb{R}$

quindi E non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Def. X insieme. Dico che X ha la proprietà dell'estremo superiore se $\forall E \subseteq X$ non vuoto e limitato superiormente questo possiede estremo superiore in X

Dall'esempio precedente $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ non ha la proprietà del sup. (assioma di completezza o di continuità),

Def. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore.

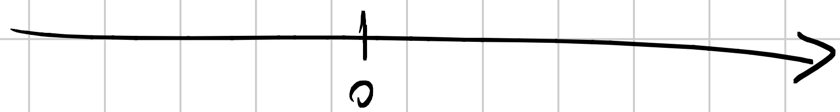
quindi $\forall E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ e limit. super.
$\exists \sup E \in \mathbb{R}$

$$E = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0, \ x^2 \leq 2 \}$$

$\exists \sup E$ (per la proprietà del sup)

$$\sup E = \tilde{x} \qquad \tilde{x}^2 = 2$$

Con la def. di $\mathbb{R}$ si ha una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i p.ti della retta



Valore assoluto di un numero (modulo)

$a \in \mathbb{R}$ $\qquad |a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$$\boxed{-|a| \leq a \leq |a|}$$

1) $\boxed{|x| \leq b}$ $\qquad$ se $b < 0$ $\nexists$ soluzioni

$b \geq 0$

- $x \geq 0 \Rightarrow x \leq b$

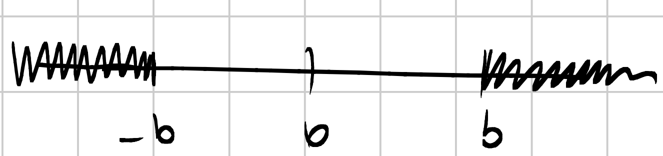
$-b \qquad 0 \qquad b$

- $x < 0 \qquad -x \leq b \qquad x \geq -b$

è equivalente $\qquad -b \leq x \leq b$

$[-b, b]$

2) $|x| \geq b$, $b \geq 0$



$x \geq 0 \rightarrow x \geq b$

$x < 0 \rightarrow -x \geq b \quad x \leq -b$

è equivalente a $\quad x \geq b$ o $x \leq -b$

$(-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$

Disuguaglianza triangolare

$x, y \in \mathbb{R}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

$$-\left(|x|+|y|\right) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

$$-b \leq z \leq b$$

$$\Updownarrow \quad |x+y| \leq |x|+|y|$$

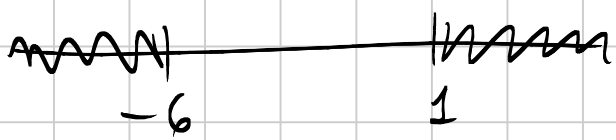
Es.

$$x|x|+5x-6>0$$

1) $x \geq 0$ $\qquad x^2+5x-6>0$

$x^2+5x-6=0$ $\qquad x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \dfrac{-5 \pm 7}{2}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -6$

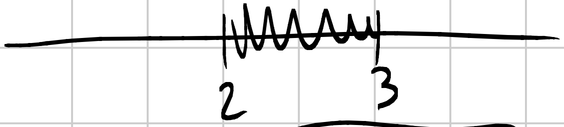


$x > 1$

2) $x < 0$ $\qquad -x^2+5x-6>0$

$$x^2-5x+6<0$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\qquad x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$



nel caso 2)

$\nexists\, x < 0$

soluzioni $\boxed{x > 1}$