13 Gennaio

Serie con termini di segno qualunque

$\sum a_n$ $\quad$ a_n ha segno variabile

$\sum a_n$ conv. assolutamente se $\underbrace{\sum |a_n|}_{\text{serie a termini positivi}}$ converge

$\downarrow$ si usano i criteri per le serie a termini positivi

$\sum a_n \quad ? \quad \sum |a_n|$

che relazione c'è tra la convergenza e la convergenza assoluta

Teorema Se una serie converge assolutamente allora è convergente (semplicemente).

Dim. diversa dal libro.

Hp. $\sum |a_n|$ converge   **Ts** $\sum a_n$ converge

$$\boxed{b_n = a_n + |a_n|}$$

$$0 \le b_n \le 2|a_n|$$

principio del confronto per le serie a termini positivi

$\sum b_n$ converge perché $\sum |a_n|$ converge

$$a_n = b_n - |a_n| \qquad \sum a_n = \sum b_n - \sum |a_n|$$

$\sum b_n$: converge; $\sum |a_n|$: converge

$\sum a_n$: converge! #

es. $\sum (-1)^n \underbrace{\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)}_{\leq 0} = -\sum (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

$a_n = (-1)^n \left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)$

studiamo la conv. assoluta

$|a_n| = 1 - \cos\frac{1}{n}$

$\cos\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{2n^2}$

$n \to +\infty$

$\sum \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ converge quindi $\sum \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ converge cioè

$\sum (-1)^n \left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$ conv. assolutamente

e quindi per il teorema appena dim.

la serie converge (semplicemente)

Se una serie converge $\Rightarrow$ conv. assolutamente?

NO!

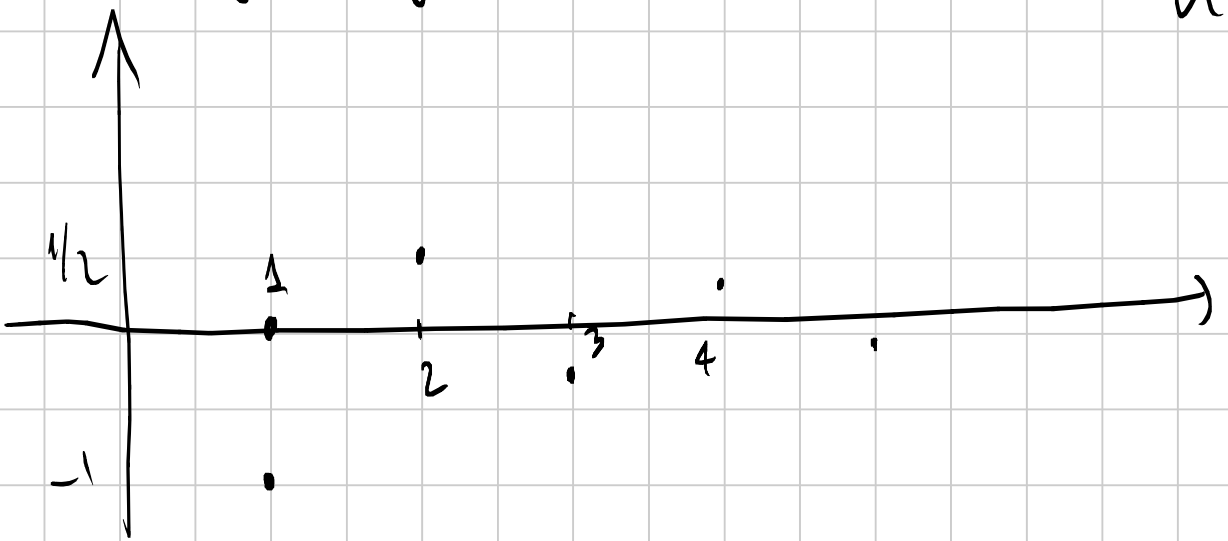
può succedere che $\sum a_n$ converga ma $\sum |a_n|$ non converga.

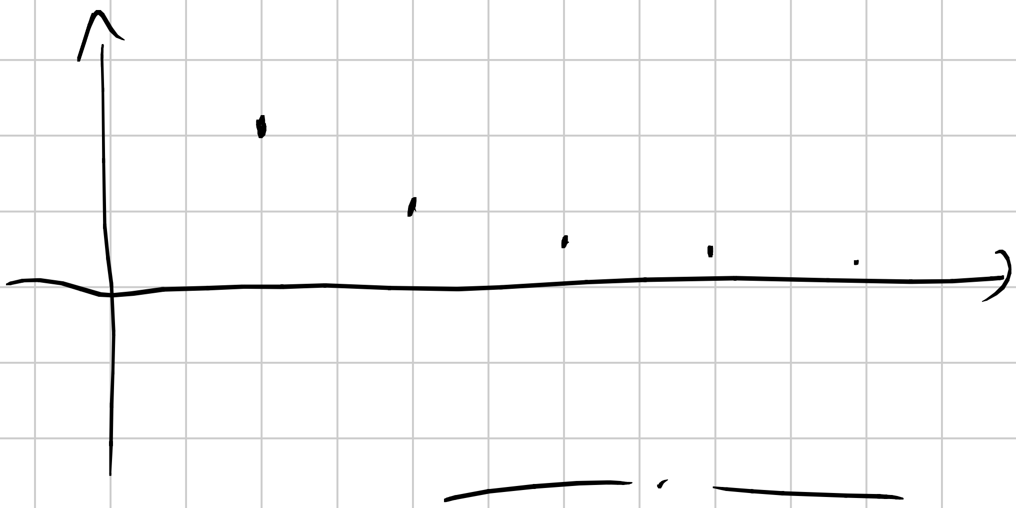
es. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es. di serie che converge ma che non conv. assolutamente.

$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ non converge

ma fra poco dim. che $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$





$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$$

Serie a termini di segno alterno

$$\sum (-1)^n a_n \quad , \quad a_n \geq 0$$

Criterio di convergenza per le serie a termini di segno alterno (Criterio di Leibniz)

$\sum (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$, $\lim_n a_n = 0$ $\Rightarrow$ $\sum (-1)^n a_n$ converge.

a_n successione decrescente

---

es. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ non conv. assolutamente

ma converge

$a_n = \frac{1}{n}$ $a_n \to 0$, $n \to +\infty$

succ. decrescente $\quad a_{n+1} \leq a_n \, , \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \; \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

---

es. $\displaystyle \sum (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$

1° cosa : converge assolutamente? $\sum |a_n| =$

$$= \sum \frac{n-1}{n^2+n}$$

$a_n \to 0$

$a_n \sim \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\sum |a_n|$ diverge.

non converge assolutamente.

2^a step : converge semplicemente

$$\sum (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n} \quad a_n$$

Criterio di Leibniz

- $a_n \geq 0$, $n \geq 1$
- $a_n \to 0$ $n \to +\infty$
- a_n è decrescente?

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad a_n = \frac{n-1}{n(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{\cancel{(n+1)} - \cancel{1}}{(n+1)(n+1+1)} = \boxed{\frac{n}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \overset{?}{\leq} \underbrace{\frac{n-1}{n\cancel{(n+1)}}}_{=a_n}}$$

$$\frac{n}{n+2} \leq \frac{n-1}{n} \qquad n^2 \leq (n-1)(n+2)$$

$$\cancel{n^2} \leq \cancel{n^2} + 2n - n - 2 \qquad 0 \leq n-2$$

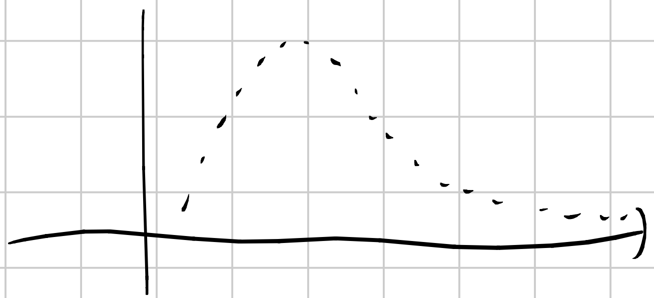
$\Rightarrow n \geq 2$

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall\, n \geq 2$$

Cioè la successione a_n è decrescente $\forall\, n \geq 2$.

— - —

<u>oss.</u> Basta che a_n sia una successione decrescente da un certo n in poi.



Es. $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{a_n \geq 0}$$

conv. assoluta

$$\sum \left| (-1)^n \frac{\log n}{n} \right| = \sum \frac{\log n}{n}$$

$\log n > 1$

$\frac{\log n}{n} > \underbrace{\frac{1}{n}}$ principio del confronto per serie. $n > 3$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{\log n}{n}$ diverge

no!

conv. semplice $\sum (-1)^n \frac{\log n}{n}$ Leibniz

- $a_n \to 0 \quad n \to +\infty \qquad \frac{\log n}{n} \to 0 \quad n \to +\infty$

- a_n decrescente $\quad a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{\log n}{n}$$

$a_n = \frac{\log n}{n}$ è decrescente

dim. che

se $f(x) = \frac{\log x}{x}$ è decrescente $\forall x > x_0$

(da un certo x in poi) allora in particolare

$$f(n) = \frac{\log n}{n}$$

è decrescente.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \overset{?}{<} 0$$

$1 - \log x < 0 \qquad \log x > 1 \qquad x > e$

f è decrescente

$\Rightarrow n > 3 \quad \frac{\log n}{n}$ è decrescente

$\Rightarrow$ valgono le ipotesi del criterio di Leibniz

$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{\log n}{n}$ conv semplic. (ma non assolutamente) es. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

conv. assoluta $\displaystyle\sum \underbrace{\frac{1}{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

$\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \displaystyle\sum \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge

$\Rightarrow \displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ conv. assolutamente (e quindi converge).

Es.

$$\sum (-1)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/n^2}}_{a_n}$$

Studiare conv. assoluta e semplice della serie.

conv. assoluta

$$\sum \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/n^2}}_{a_n}$$

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

no conv. assoluta

conv. $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/n^2}$

$a_n \to 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

a_n è decrescente $\quad \frac{1}{\sqrt{n}}$ decrescente

$\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}$ decrescente

e^{1/n^2} decrescente

composizione di una crescente con una decrescente

$$\left(f(g(x))\right)' = \underbrace{f'(g(x))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\leq 0} \leq 0$$

a_n è decrescente perché prodotto di successioni decrescenti.

$\mathbb{R}$

<u>oss.</u> $\dfrac{\log n}{n}$ non si può applicare il metodo di sopra perché $\log n$ è crescente.

es. $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1+\frac{2}{n^{1/3}}\right)$

Dire per quali $\alpha \geq 0$
la serie conv assolut.
e converge.

1) conv. assoluta

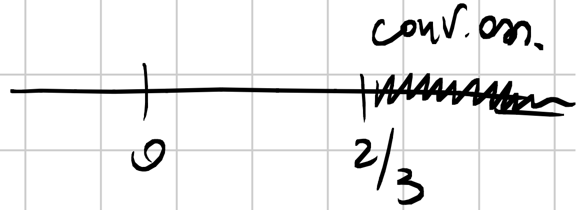
$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1+\frac{2}{n^{1/3}}\right)$$

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha} \frac{2}{n^{1/3}} = \frac{2}{n^{\alpha+\frac{1}{3}}}$$

$\sum a_n$ converge $\iff$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{3}}}$ converge

cioè se

$\alpha + \frac{1}{3} > 1$ $\qquad$ $\alpha > \frac{2}{3}$

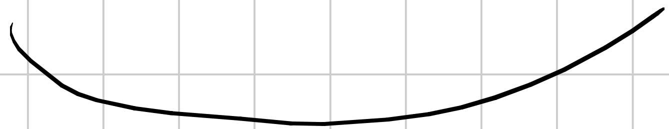


la serie conv. assolutamente se $\alpha > 2/3$

se $\quad 0 \le \alpha \le \frac{2}{3}$ $\quad$?

non c'è conv. assoluta ma ci può essere conv. semplice.

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{2}{n^{1/3}}\right)$$

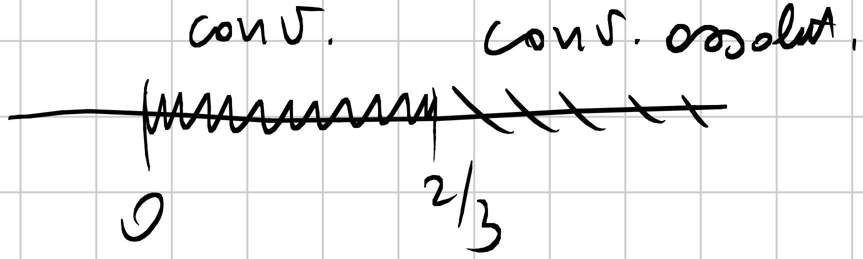


a_n

$a_n \Rightarrow 0$ vero!

a_n decrescente perché prodotto di due successioni decrescenti

$0 \le \alpha \le \frac{2}{3}$ converge



es. $\sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \frac{x^{2n}}{3^n}$

dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie conv. assolutam. o conv.

. conv. assoluta

$$|a_n| = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \frac{x^{2n}}{3^n} \sim \frac{x^{2n}}{n\, 3^n}$$

$\sum |a_n|$ converge $\iff$ $\sum \frac{x^{2n}}{n\, 3^n}$ b_n

criterio della radice.

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n\,3^n}} = \frac{x^2}{\sqrt[n]{n}\;3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{3}$$

ℓ

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \left(\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1 \right)$$

$\ell = \frac{x^2}{3} < 1$ la serie converge

$|x| < \sqrt{3}$

$\ell = \frac{x^2}{3} > 1$ la serie diverge $|x| > \sqrt{3}$

$l = \frac{x^2}{3} = 1 \longrightarrow x^2 = 3 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$$\sum \frac{x^{2n}}{n\, 3^n} = \sum \frac{\cancel{3^n}}{n\, \cancel{3^n}} = \underbrace{\sum \frac{1}{n}}$$

non converge

$|x| < \sqrt{3}$ la serie conv. assolut.

$|x| \geq \sqrt{3}$ la serie non conv. assolut.

$$\sum (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

conv. assoluta $\quad |x| < \sqrt{3}$

$|x| > \sqrt{3} \qquad x^2 > 3 \qquad \frac{x^2}{3} > 1$

$$\frac{(x^2)^n}{3^n} = \left(\frac{x^2}{3}\right)^n \to +\infty$$

$$a_n \not\to 0$$

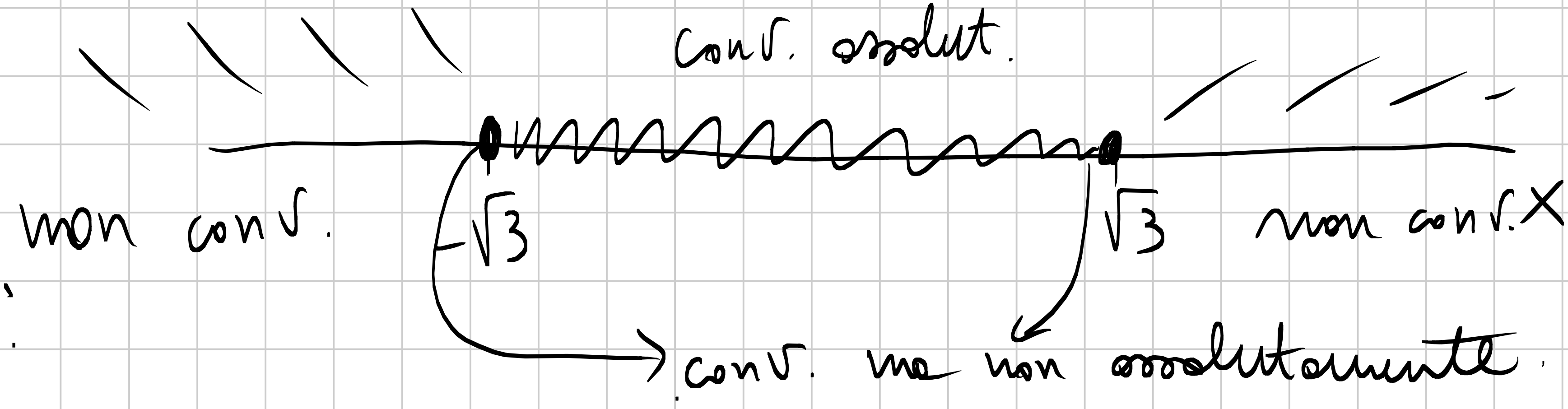
non è soddisfatta la condizione necessaria di conv. di una serie

$|x| > \sqrt{3}$ la serie non converge

$|x| = \sqrt{3}$ $x^2 = 3$

$$\sum (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} = \sum (-1)^n \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}_{\geq 0}$$

- $a_n \to 0$
- a_n decrescente $\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ è decrescente



es. $\sum \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n^5+1}}$

dire per quali $x \in \mathbb{R}$
la serie conv.
o conv. assolut.

es. $\sum (-1)^n \dfrac{\left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)}{(1+n)^{3\alpha+1}}$

- Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \to 0$
- Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. la serie conv. assolutamente
- Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ " " converge.

es. $\sum \frac{n\,2^n + 5^n}{\alpha^n + 3^n}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_$

Funzioni di più variabili

Cap 3 Vol. 2

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = f(x)$

$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(x) \in \mathbb{R}$

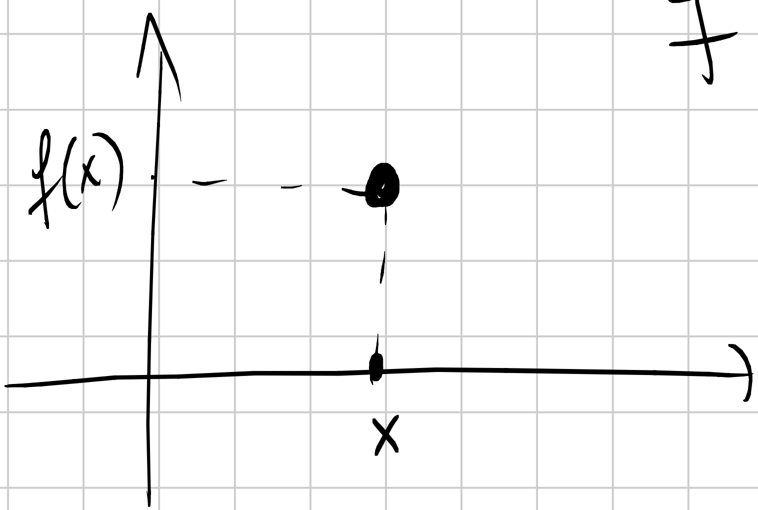


grafico $\subseteq \mathbb{R}^2$

$(x, f(x))$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \qquad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$

$n = 2$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

funzioni di due variabili

$$(x_1, x_2) \longrightarrow f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

o

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

$n=3 \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

es. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x$

$$(1, 2) \longrightarrow f(1,2) = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(0, 5) \longrightarrow f(0,5) = 0 + 25 + 0 = 25$$

Es. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x+y) + \cos(z+x)$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\pi, 0, 1) \longrightarrow f(\pi, 0, 1) = \operatorname{sen}(\pi + 0) + \cos(1+\pi) =$$

$$= \operatorname{sen}\pi + \cos(1+\pi) \in \mathbb{R}$$

Dominio di una funzione

es. $f(x,y) = \log x + \log y$

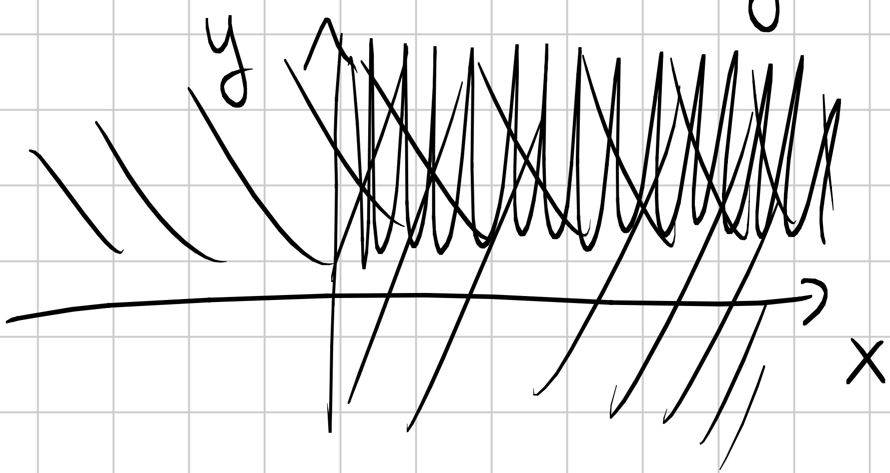
f non è definita su tutto $\mathbb{R}^2$

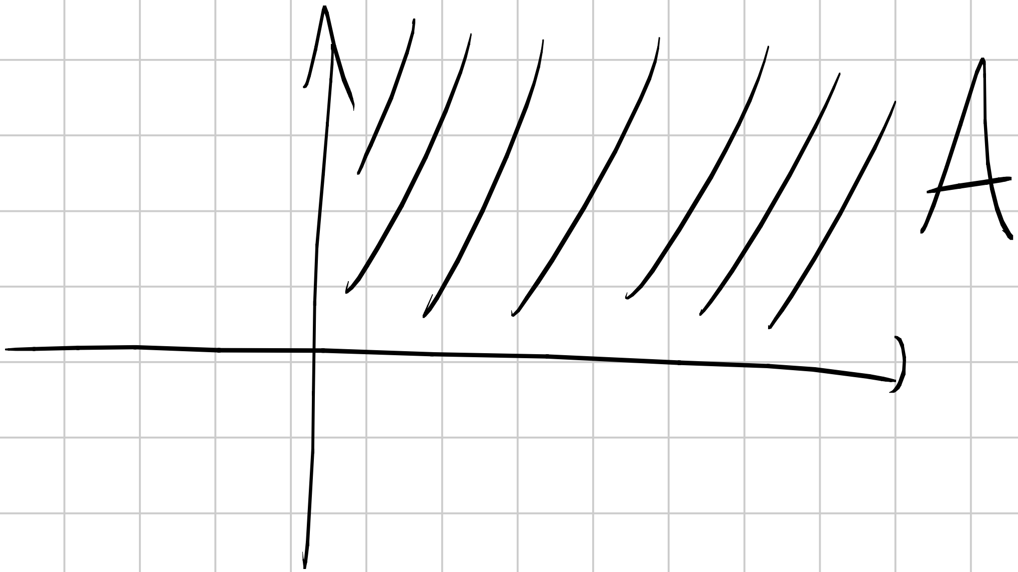
$x > 0$

$y > 0$

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } y>0 \}$

Disegno il dominio



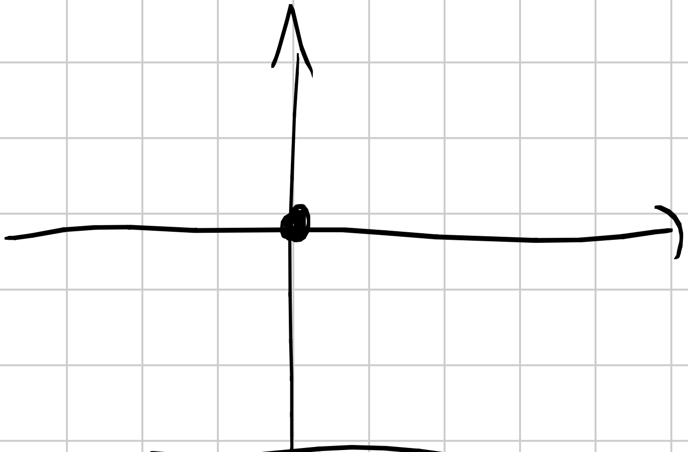


es. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$(x,y) \longrightarrow \frac{x}{x^2+y^2}$$

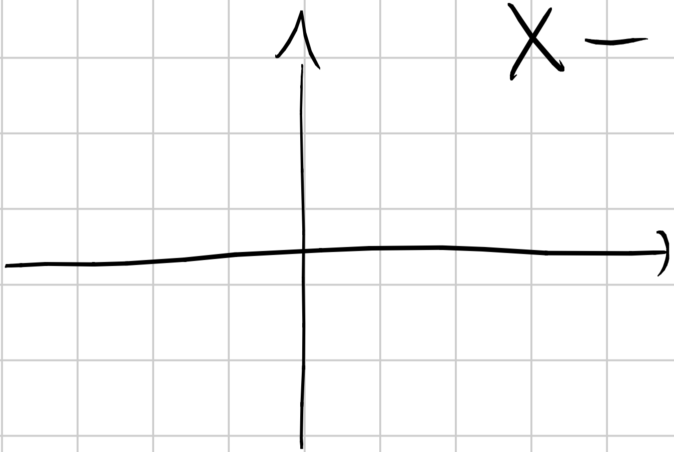
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \neq 0 \} =$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0) \}$$

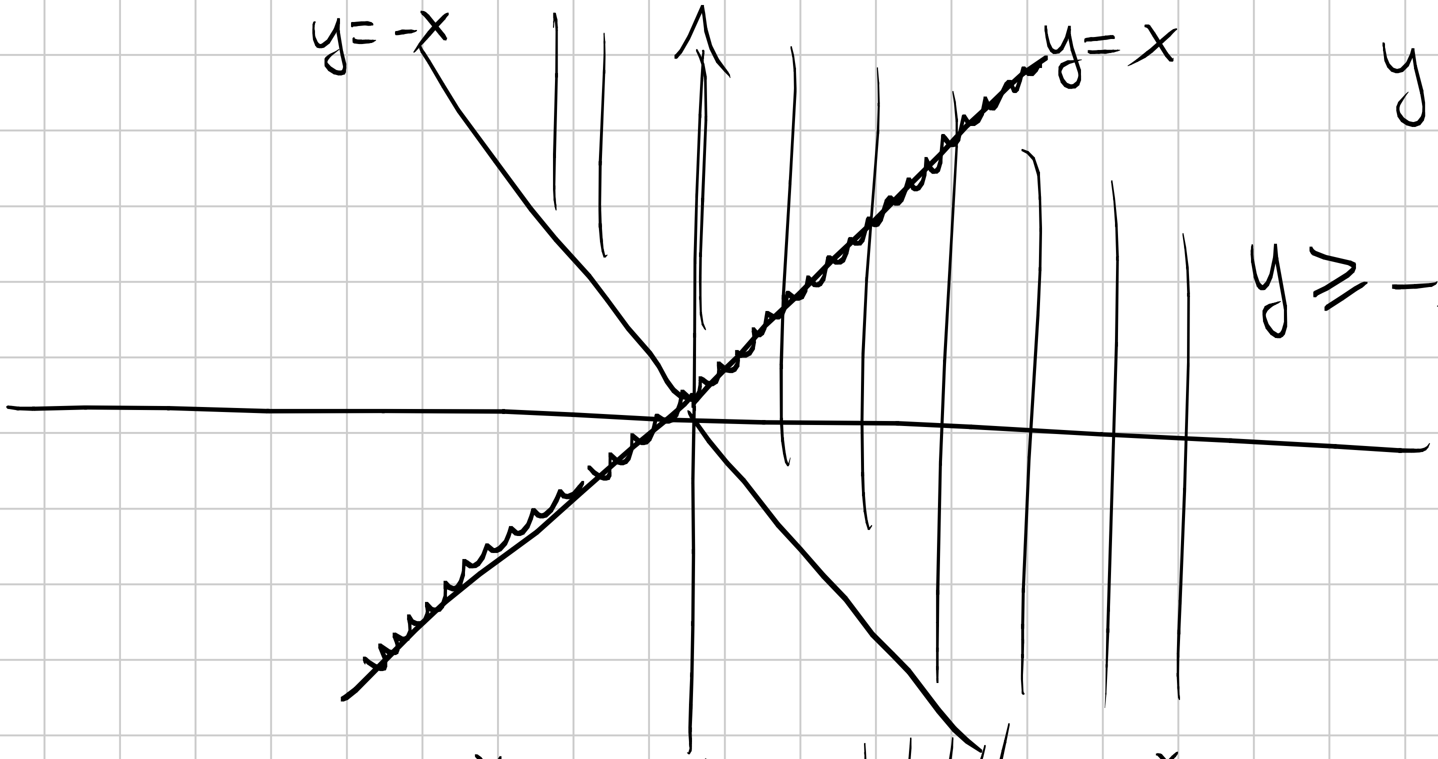


es. $$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \neq 0 \end{cases}$$

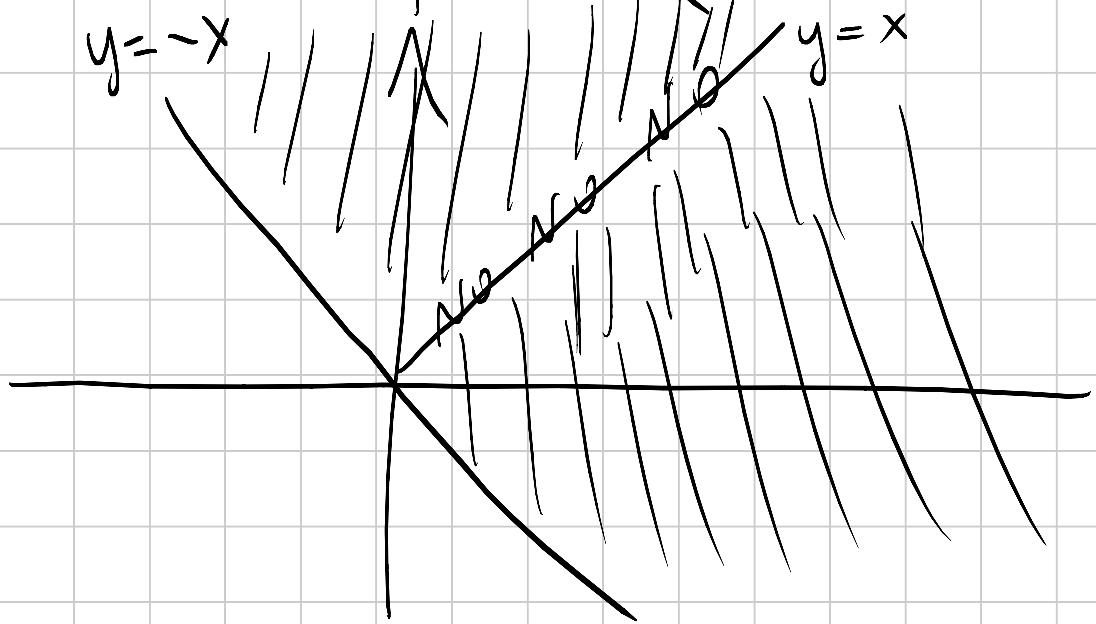


$$\begin{cases} y \geq -x \\ y \neq x \end{cases}$$



$y = -x$

$y \geq -x$



$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y)$$

$$\text{graf } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \}$$

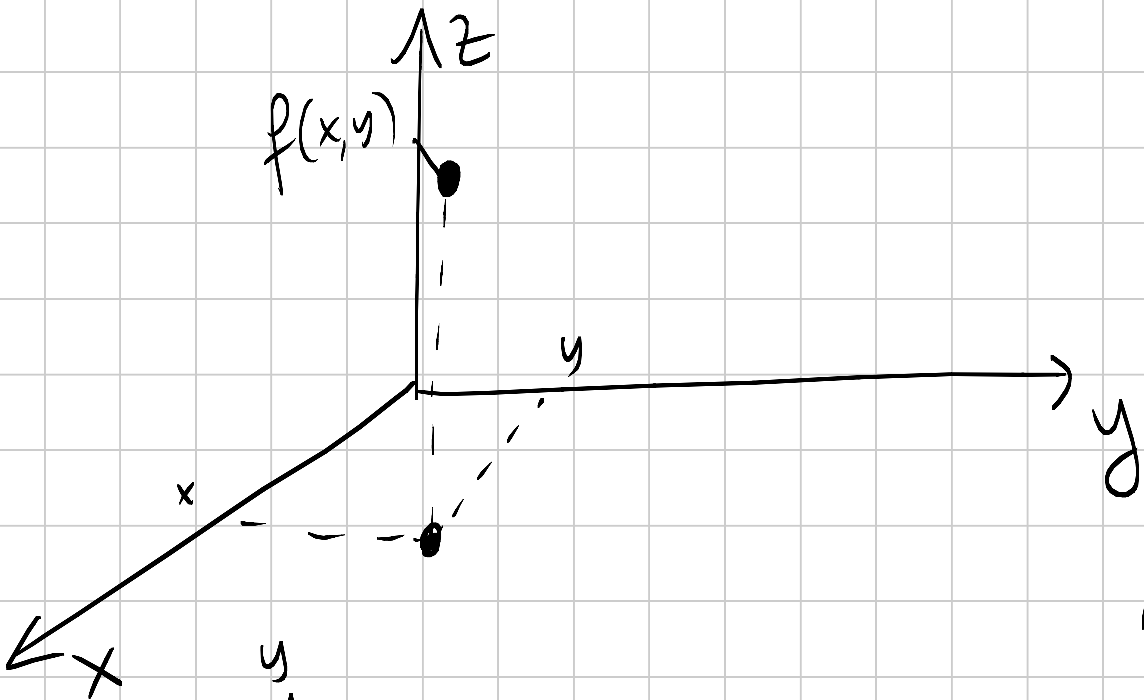
$$(x, y, f(x, y))$$

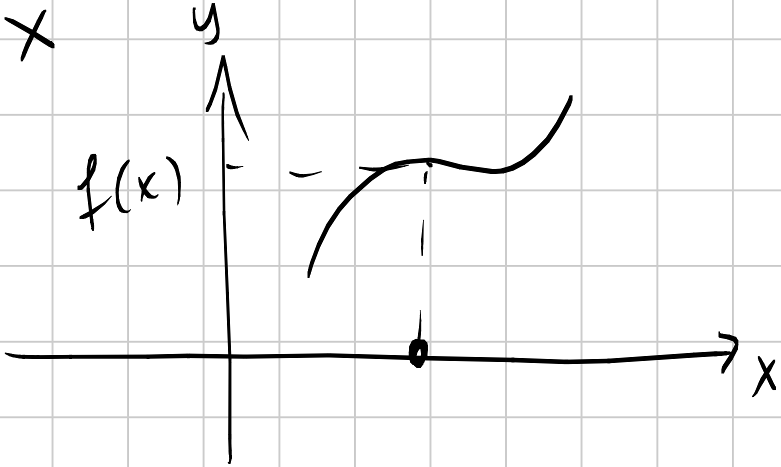
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

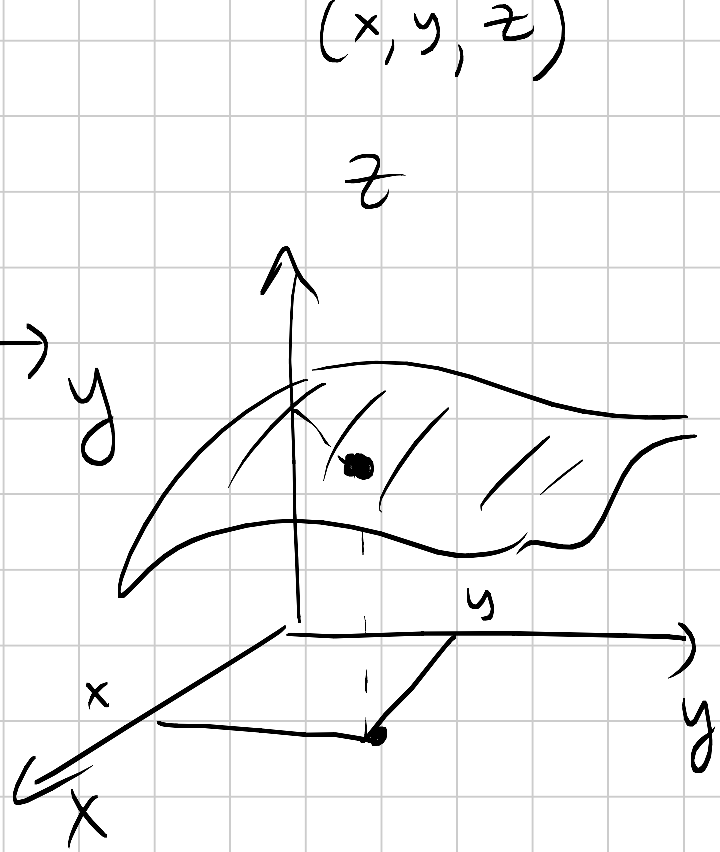
$$\text{graf } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$

$$(x, f(x))$$

graf $f = \{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3\}$





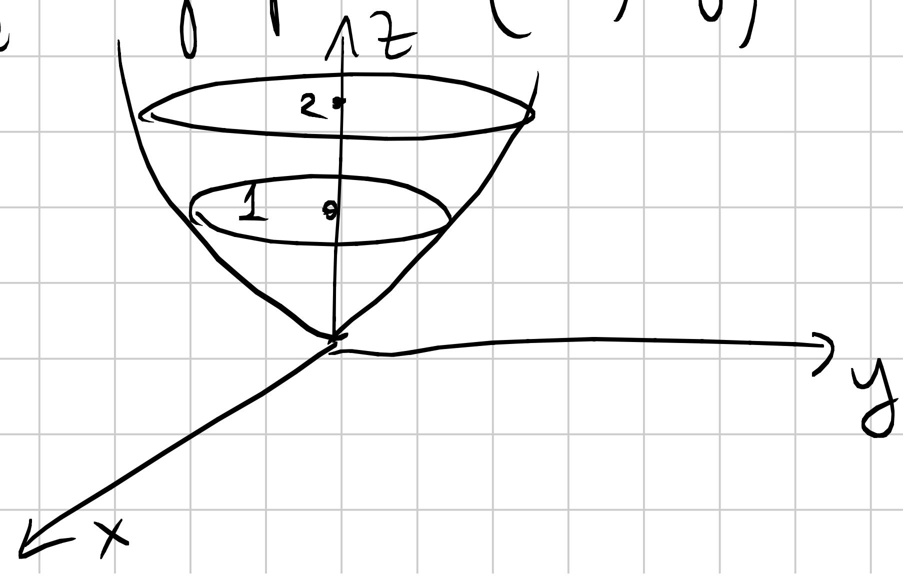


es. $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad A = \mathbb{R}^2$

disegnare il dominio

disegnare il grafico $(x, y, x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3$

paraboloide



$z = f(x,y)$

$z = x^2 + y^2$

$(0, 0, 0)$