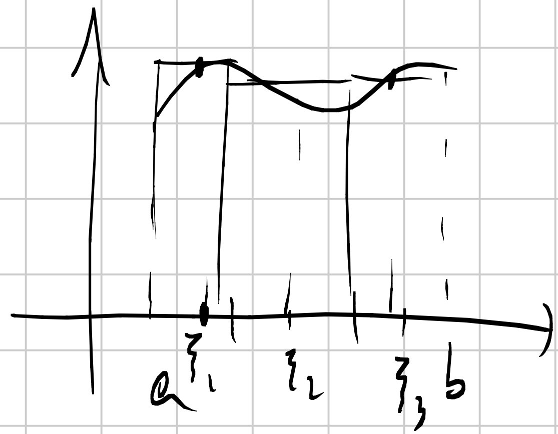
# Lezione del 14 Dicembre

## Integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx =: \lim_n S_n$$

somme di Cauchy-Riemann



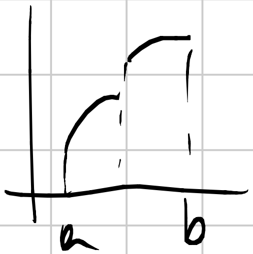

$\downarrow$ $f : (a,b)$

$f(x) = c \qquad \int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$

Si può dim. che:

**Teo.** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ è integrabile

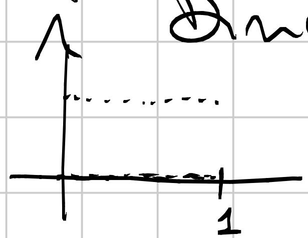
**Teo.** $f$ monotona e limitata $\Rightarrow$ è integrabile



Es di funzione non integrabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

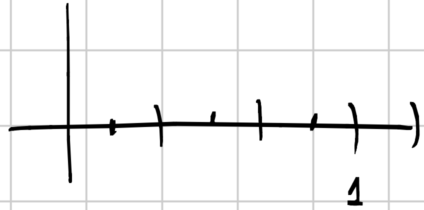
$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

funzione di Dirichlet



$f$ non è continua in nessun punto di $(0,1)$.

$$S_n = \sum_j \underbrace{f(\xi_j)}_{=1} (x_j - x_{j-1})$$




prendo $\xi_j \in \mathbb{Q}$ $\quad f(\xi_j) = 1 \quad S_n = 1 \to 1$

prendo $\xi_j \notin \mathbb{Q}$ $\quad f(\xi_j) = 0 \quad S_n = 0 \to 0$

quindi $\lim_n S_n$ non è indipendente dalla scelta degli $\xi_j$

$\Rightarrow$ la $f(x)$ <u>non</u> è integrabile

**Teo.** $f_1$ è integrabile in $[a,b]$
$f_2$ " " in $[b,c]$

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & [a,b) \\ f_2 & [b,c] \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ è integrabile in $[a,c]$.


## Proprietà dell'integrale definito

Teoreme $f, g$ integrabili in $[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ è integrabile e

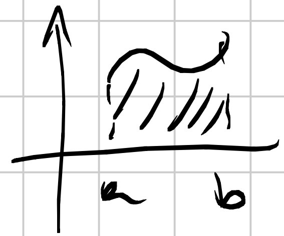
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$


$\Rightarrow$ Se $c \in (a,b)$

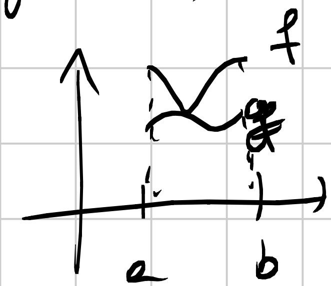
$f$ è integrabile anche su $[a,c]$ e $[c,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad f \geq 0 \quad \text{in } [a,b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

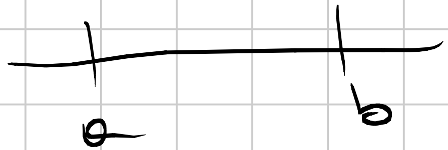



$$\Rightarrow \quad f \geq g \quad \text{in } [a,b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$




$$\Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

<u>**Convenzione**</u>: se $a < b$



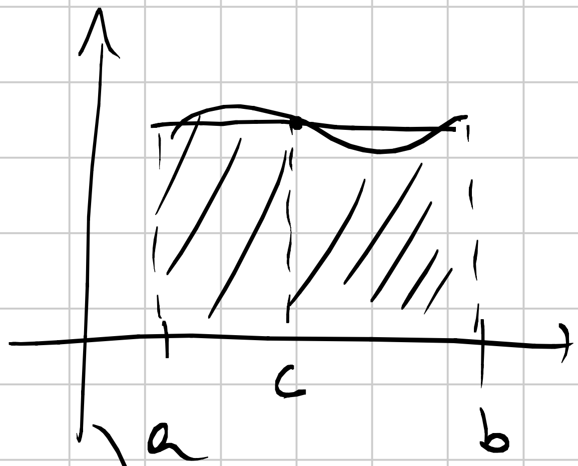

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

Dim. no

Teorema della media integrale $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

allora esiste $c \in [a,b]$ t.c.

$$\underbrace{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{media integrale}} = f(c)$$




$$\left( \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a) \right)$$

**Dim.** Poiché $f$ è continua in $[a,b]$ $\exists$ $M$ e $m$ max e min di $f$ in $[a,b]$

$$m \le f(x) \le M$$

$$\Downarrow \text{ monotonia dell'integrale}$$

$$m = \frac{1}{(b-a)}\underbrace{\int_a^b m\,dx}_{m\cdot(b-a)} \underbrace{\le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \le}_{} \frac{1}{(b-a)}\underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)} = M$$

$$\underbrace{m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx}_{\lambda} \leq M$$

$\lambda \in [m, M]$

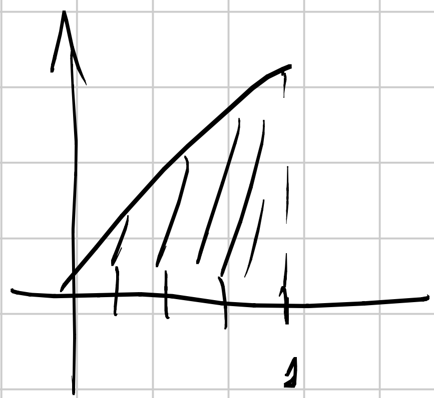
per il teorema dei valori intermedi

$$\exists\, c \in [a,b] \ : \ f(c) = \lambda$$

#

— · —

<u>Es.</u> $f(x) = x$ in $[0,1]$



$$\int_0^1 x \, dx$$

---

**Primitive di una funzione f**

**Def.** f definita in $[a,b]$. $G(x)$ derivabile in $[a,b]$ è **PRIMITIVA** di $f(x)$ in $[a,b]$ se $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

es. $f(x) = x$ $\qquad G(x) = \frac{x^2}{2}$

$G(x) = \frac{x^2}{2} + 8$

$f(x) = \cos x$ $\qquad G(x) = \operatorname{sen} x + K$

Teo. Se $G$ è una primitiva di $f$ allora tutte e sole le primitive di $f$ sono del tipo $G + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Dim. Hp. $G' = f$

1) $G+K$ è primitiva di $f$

$$(G+K)' = G' = f$$

2) se $\bar{G}$ è un'altra primitiva

$$\Rightarrow \bar{G} = G + c \quad , \; c \text{ costante}$$

$$\bar{G}' = f \qquad \Rightarrow \qquad \bar{G}' - G' = \cancel{f - f} = 0$$

$$G' = f \qquad\qquad (\bar{G} - G)' = 0 \quad \text{in } [a,b]$$

dal teorema della derivata nulla

$$\bar{G} - G = c$$

#.

es. $f(x) = \cos x$ $\quad G(x) = \operatorname{sen} x$

tutte le funzioni sono del tipo

$\operatorname{sen} x + K$

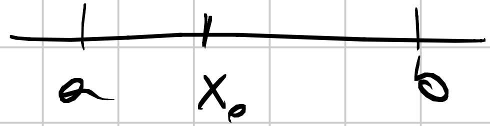
$$\{ \text{primitive di } f \} = \int f(x)\,dx$$ integrale indefinito

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + K$$ "funzioni" (insieme di funzione)

$$\int_a^b \cos x\,dx = \underline{\underline{\text{numero reale}}}$$

# Teorema fondamentale del calcolo integrale

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e sia




$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$x_0\in[a,b]$

(funzione integrale di $f$)

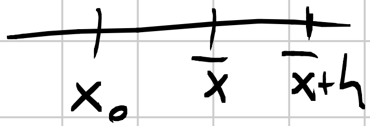
Allora $F(x)$ è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x)=f(x)$

(cioè $F$ è una primitiva di $f$)

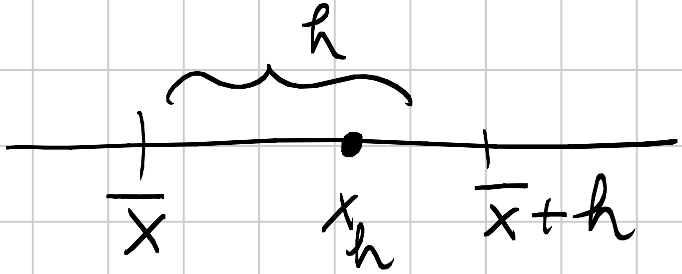
<u>Dim.</u> dim. che $F(x)$ è derivabile in $\bar{x}$

$$\frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\left(\cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt} + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}\right) = \underbrace{\frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt} = f(x_h)$$

additività integrale



media integrale di $f$ in $[\bar{x}, \bar{x}+h]$

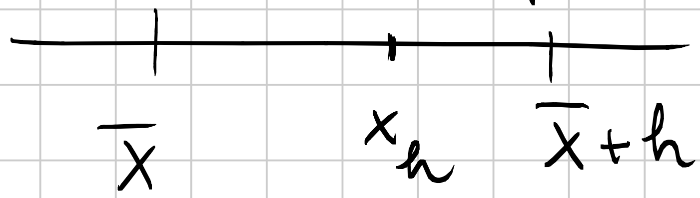



poiché $f$ è continua il teorema della media integrale mi dice che esiste $x_h \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$

t.c.
$$\frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt = f(x_h)$$

$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(x_h)$$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h}}_{F'(\bar{x})} = \lim_{h\to 0} f(x_h) = f(\bar{x})$$




se $h\to 0$ $\quad x_h \to \bar{x}$

poiché $f$ è continua $\quad f(x_h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(\bar{x})$

$$F'(\bar{x}) = f(\bar{x}) \qquad \#$$

Quindi ho dimostrato che

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$ è una primitiva di $f$

$$\int f(x)\,dx = \{ F + K,\ K \in \mathbb{R} \}$$

Il teorema ci dice anche che ogni funzione continua ha una primitiva.

Corollario $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

$G(x)$ primitiva di $f(x)$.

allora $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

Dim. $G(x)$ poiché è una funzione

$$G(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{\text{è una primitiva}} + K$$ prendo $x_0 = a$

(per il teo. fondam. del calcolo integrale)

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + K$$

$$G(a) = \underbrace{\cancel{\int_a^a f(t)\,dt}}_{=0} + K = K$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + G(a)$$

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + G(a)$$

#

Quindi per calcolare

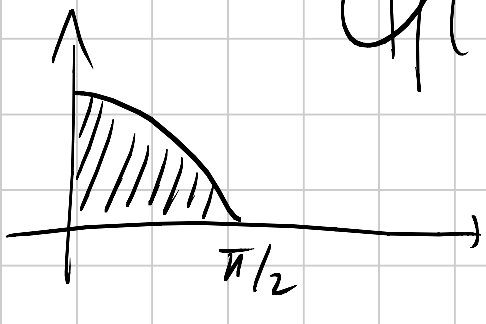
$$\int_a^b f(t)\,dt$$

basta trovare una funzione $G$ di $f$ e calcolarla agli estremi dell'intervallo $[a,b]$.

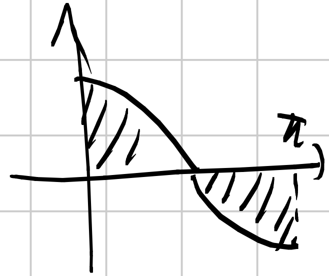
Es.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x}_{f(x)}\,dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$G(x) = \operatorname{sen} x$$



$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \text{sen}\,\pi - \text{sen}\,0 = 0$$




— · —

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{numero reale} = \underline{\text{integrale definito}}$$

F è una funzione di f

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K = \text{insieme di funzioni}$$

$= \underline{\text{integrale indefinito}}$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x)$$

funzione integrale

integrale definito in $[x_0, x]$.

G funzione

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

→ Teo. fond. calcolo.

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{funzione integrale}} + K$$

$f(x)$ f. elementari $\Rightarrow$ f continue $\Rightarrow \exists$ primitiva

ma non sempre si riesce a trovarla esplicitamente

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + K$$

f continua in $(a,b)$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log|b| - \log|a| \quad \begin{cases} a,b>0 \\ a,b<0 \end{cases}$$

$$\cancel{\int_{-3}^{5} \frac{1}{x}\,dx}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + K$$

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + K$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + K$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + K$$

Proprietà per scomposizione

$$\int (3x^2 + 5x)\,dx = 3\int x^2\,dx + 5\int x\,dx$$

$$= 3\,\frac{x^3}{3} + 5\,\frac{x^2}{2} + K$$

$$\int_a^b (3x^2+5x)\,dx = 3\int_a^b x^2\,dx + 5\int_a^b x\,dx$$

per alcune funzioni non si riesce a calcolare esplicitamente la funzione.

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Esercizio limite con Mc Laurin.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log\left(1+\left(x^2+x\right)\right) - \log\left(1+x\right) - \alpha x^2}{\operatorname{senh}\left(e^{-1/x}\right) + x^2}$$

N. $\log\left(1+\left(x^2+x\right)\right) - \log\left(1+x\right) =$

$= \left(x^2+\cancel{x}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+x\right)^2 + o\left(\left(x^2+x\right)^2\right) - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$

$$= x^2 - \cancel{\frac{1}{2}\left(x^2\right)} + + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o\left(x^2\right) = x^2 + o(x^2)$$

N.

$$\log\left(1 + (x^2 + x)\right) - \log(1+x) - \alpha x^2 = x^2 - \alpha x^2 + o(x^2)$$

$$= x^2(1-\alpha) + o(x^2)$$

D.

$$\operatorname{senh}\left(e^{-1/x}\right) + x^2 = \qquad \operatorname{senh} y = y + o(y)$$

$$= \underbrace{e^{-1/x} + o\left(e^{-1/x}\right)}_{o(x^2)} + x^2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(1-\alpha)+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

$\alpha \neq 1$ $\lim = 1-\alpha$

$\alpha = 1$ $\lim = 0$

$$\frac{o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \to 0$$

se l'es. avesse richiesto l'ordine d'infinitesimo del numeratore

$\alpha \neq 1$ l'ordine è 2

$\alpha = 1$ ?

$$\log\left(1+\left(x^2+x\right)\right)-\log(1+x)=\left(x^2+x\right)-\frac{\left(x^2+x\right)^2}{2}+$$

$$+\frac{\left(x^2+x\right)^3}{3}-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)=$$

$$=x^2+\cancel{x}-\cancel{\frac{1}{2}x^2}-x^3+\cancel{\frac{x^3}{3}}-\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\cancel{\frac{x^3}{3}}+o\left(x^3\right)$$

$$=x^2-x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\cdot\ \log\left(1+\left(x^2+x\right)\right)-\log(1+x)-\alpha x^2=(1-\alpha)x^2-x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\alpha=1$$

$$= -x^3 + o(x^7)$$

$$\overline{\quad\quad} \cdot \overline{\quad\quad\quad}$$

$\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) - x^\alpha + \operatorname{senh}^3 x}{\operatorname{tg}^3 x + (1-\cos x)^\alpha} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x^\alpha} - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) - \cancel{x^\alpha} + x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3) + \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha} + o(x^{2\alpha})}$$

1) se $2\alpha < 3$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})}{\frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha} + o(x^{2\alpha})}$$

$$= -\frac{2^\alpha}{2} = -2^{\alpha-1}$$

2) se $2\alpha = 3$

$\alpha = 3/2$

$$\frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3 + \frac{x^3}{2^{3/2}}} \to$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^{3/2}}\right)}$$

3) $2\alpha > 3$

$$\frac{x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \rightarrow 1$$