Lezione del 16 Novembre

Limiti notevoli

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$a>0$$

$$\frac{e^{x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{a^{x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \log a$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1 \quad x \to 0$$

$$\operatorname{sen} x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

infinitesimo

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2} \quad x \to 0$$

$f(x)$ è infinitesimo per $x \to c$ se $f(x) \xrightarrow[x \to c]{} 0$

$f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni infinitesime $x \to c$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \\ \ell \neq 0 \\ \nexists \end{cases}$$

f è infinitesimo di ordine sup. a g

f " " " ordine inferiore rispetto a g

infinitesimi dello stesso ordine

non sono confrontabili

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^1} \to 1 \qquad x \to 0$$

si dice che $\operatorname{sen} x$ è un infinitesimo di ordine 1

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \underset{x \to 0}{=} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cdot x} \to \begin{cases} +\infty & (x \to 0^+) \\ -\infty & (x \to 0^-) \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}}_{x \to 0} \cdot \sqrt{x} \to 0$$

$\to 1$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \to 0 \quad x \to 0$$

- $$\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$1-\cos x$ è infinitesimo dello stesso ordine di x^2

è infinitesimo di ordine 2

- $x^3 + x^2$ è infinitesimo
$x \to 0$

$$x^3 + x^2 = x^2 \underbrace{(x+1)}_{\to 1}$$

$$\frac{x^3+x^2}{x^2} = \frac{\cancel{x^2}(x+1)}{\cancel{x^2}} \to 1$$

$x^3 + x^2$ è infinitesimo di ordine 2
$x \to 0$

- $\sqrt{x} + x^2$ infinitesimo di ordine $1/2$
$x \to 0$
(verificare)

<u>Infiniti</u>

$f(x)$ è infinito per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

x infinito

$x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$\frac{1}{x}$ infinito $x \to 0^+$
$x \to 0^-$

$x \to +\infty$ $\frac{1}{x}$ è infinitesimo.

<u>Gerarchie infiniti</u> $\quad \alpha>0, \quad a>1, \quad \beta>0, \quad b>1$

$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x \qquad x \to +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^{1000}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1000}}{2^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \qquad y = \frac{1}{x} \qquad \begin{matrix} x \to +\infty \\ y \to 0^+ \end{matrix}$$

$$\lim_{y \to 0^+} y \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to 0^+} -y \log y = 0$$

$$\boxed{\lim_{y \to 0^+} y \log y = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \cdot (\infty)$$

$$\frac{y}{\left(\frac{1}{\log y}\right)} \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$$

in realtà vale + in generale

$$\boxed{\lim_{y \to 0^+} y^{\beta} \, |\log y|^{\alpha} = 0} \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

$\log y < 0$ "vicino a" $y = 0$

e quindi devo scrivere $|\log y|$ se voglio fare le potenze reali con esponente α.

Esercizi

$$\log x = y$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\log x)}{1 + \log x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{1 + y} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{y\left(\frac{1}{y} + 1\right)} = 0$$

$\to 0$ $\to 1$

- $$\lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) =$$

$\infty \cdot 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x+1+2}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) =$$

$$\frac{2}{x+1} = y$$

$$x \to +\infty$$

$$y \to 0$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{2}{y} - 1\right) \log(1+y) =$$

$$x+1 = \frac{2}{y}$$

$$x = \frac{2}{y} - 1$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2}{y} \log(1+y) - \log(1+y)$$

$$\to 1$$

$$= 2$$

- $$\lim_{x\to 0^+} \log x \cdot \left(\frac{\log(1-x)}{(-x)}\right)\cdot(-x) = 0$$

$\infty \cdot 0$

1

$x \to 0^+$

0

$\left(\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0\right)$

es. di fine $\qquad x\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1+x)}{\operatorname{sen} x} = 1$$

$$1$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2(\operatorname{sen}^2 x - 1) - 2e^{2x^2}}{x^2 + x^3 + 2^{-3/x}}$$

$$\frac{0}{0}$$

<u>Num.</u> $x^2 - 2\operatorname{sen}^2 x + 2 - 2e^{2x^2} =$

$$= x^2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 2\left(e^{2x^2} - 1\right) =$$

$$= x^2\left(1 - 2\,\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} - 2\,\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}\right) =$$

$$= x^2\left(1 - 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 - 2\,\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot 2\right)$$

Denom. $x^2 + x^3 + 2^{-3/x} = \qquad x \to 0^+$

$$= x^2\left(1 + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{2^{-3/x}}{x^2}}\right)$$

$$\frac{2^{-3/x}}{x^2} = \frac{1}{x^2 \, 2^{3/x}} =$$

$x \to 0^+$

$\frac{1}{x} = y$

$y \to +\infty$

$$= \frac{y^2}{2^{3y}} \longrightarrow 0$$

per la gerarchia degli infiniti

quindi $2^{-3/x}$ tende a zero più velocemente di x^2 per $x \to 0^+$

cioè è un infinitesimo di ordine superiore a x^2

Ritorniamo al limite iniziale

$$\frac{x^2-2(\operatorname{sen}^2 x-1)-2e^{2x^2}}{x^2+x^3+2^{-3/x}}=\frac{\cancel{x^2}\left(1-2\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2}_{\to 1}-2\underbrace{\left(\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\right)}_{\to 1}\cdot 2\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{x}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{2^{-3/x}}{x^2}\right)}_{\to 0}\right)}$$

$$\to \frac{1-2-4}{1}=-5$$

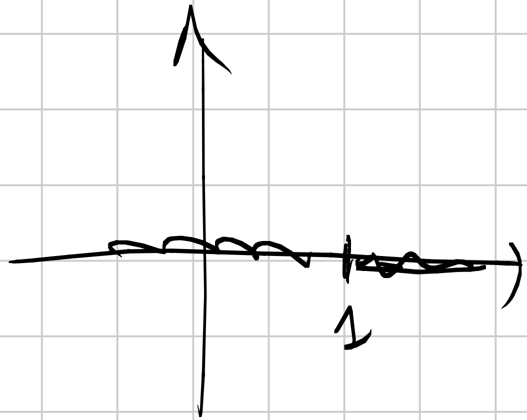
— · —

Es. funzioni continue

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 1 \\ a - bx & x < 1 \end{cases}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

det. i valori dei parametri a e b affinché f sia una funzione continua $\forall x \in \mathbb{R}$.



$x > 1$ f è continua

$x < 1$ f è continua

continuità in $X=1$

$$? \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$$

$$? \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

calcolo $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(a-bx) = a-b$$

f è continua in $x=1$ se $\lim_{x\to 1^+} f = \lim_{x\to 1^-} f = 0$

$$0 = a - b \iff a = b$$

se $a = b$ la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

se $a \neq b$ $\lim_{x \to 1^-} f \neq \lim_{x \to 1^+} f = 0$

$\therefore$ la f è discontinua in $x=1$ e in $x=1$

c'è una discontinuità di salto.

$n.$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,\text{sen}(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)} & x \neq 1 \\ \alpha - 1 & x = 1 \end{cases}$$

$x \neq 1$ f ē continue

$x = 1$ $$\lim_{x \to 1} \frac{2\,\text{sen}(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)} = \alpha - 1$$

$x - 1 = t$

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} t + t^2}{2(e^t - 1)}$$

$\alpha - 1 = 1$

$\Downarrow$

$\alpha = 2$

$R = 1$