Lezione del 16 Dicembre

Integrali generalizzati

Integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ — f definita in $[a,b]$

- limitata
- $[a,b]$ limitato

1) Integrazione delle funzioni non limitate

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0,1]$ non è limitata

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \, ?$$

2) Integrazione di funzioni limitate su un intervallo illimitato

<u>es.</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad [1, +\infty)$

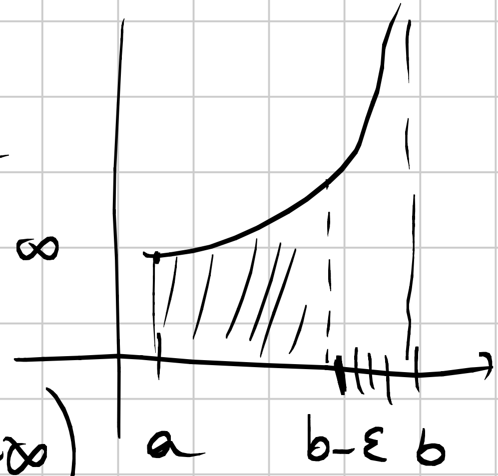
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \, ?$$

1) Integrazione di funzioni non limitate

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua ma

$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

(oppure $f(x) \to -\infty$)



$[a, b-\varepsilon]$ $\qquad \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ esiste

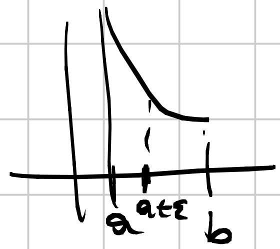
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Def. • se il limite esiste finito f è integrabile in $[a,b)$ o che $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente

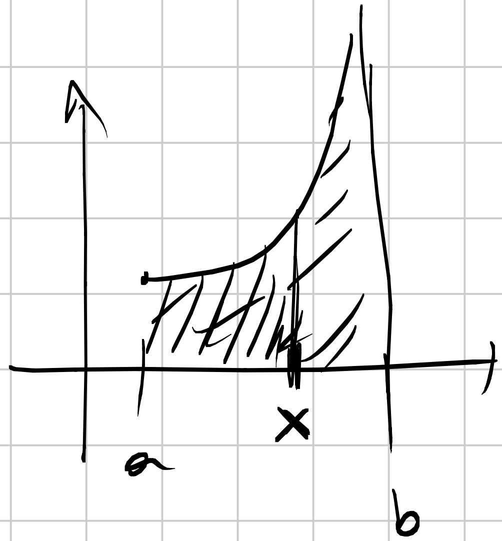
• se il limite $= \pm\infty$ si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente (f non è integrabile)

• se il limite $\nexists \Rightarrow$ l'$\int_a^b f(x)\,dx$ $\nexists$.

Analoga def se f è illimitata in a



$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$



OSS. Per costruzione $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area sotto il grafico di f tra $[a,b)$.

OSS. $f(x) \geq 0$ $\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F(x)$ è crescente

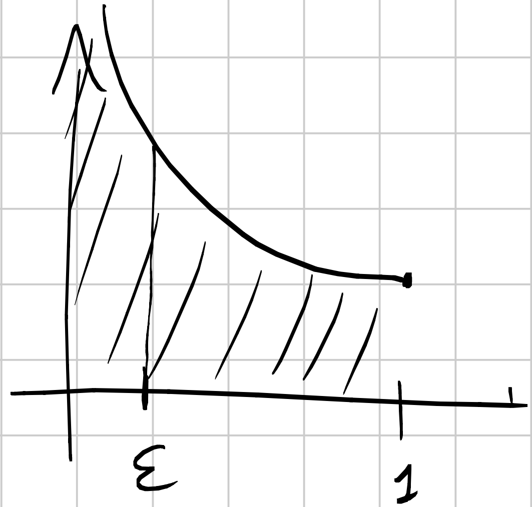
(per la monotonia dell'integrale)

quindi esiste sempre

$$\lim_{x \to b} F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

finito o infinito

quindi per le funzioni $f(x) \geq 0$ si ha che l'$\int$ converge o diverge.



Es. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in $(0,1]$

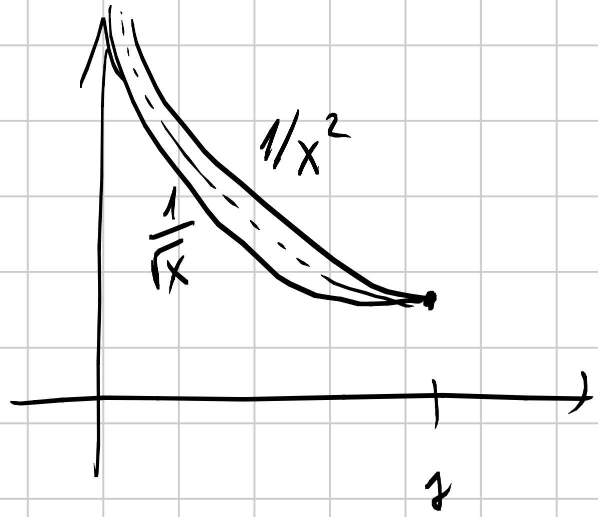
è integrabile in $(0,1]$?

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\cancel{\log 1} - \log \varepsilon\right) = +\infty$$

no!

Es. $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

è integrabile in $(0,1]$?



$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) =$$

$$\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to 0$$

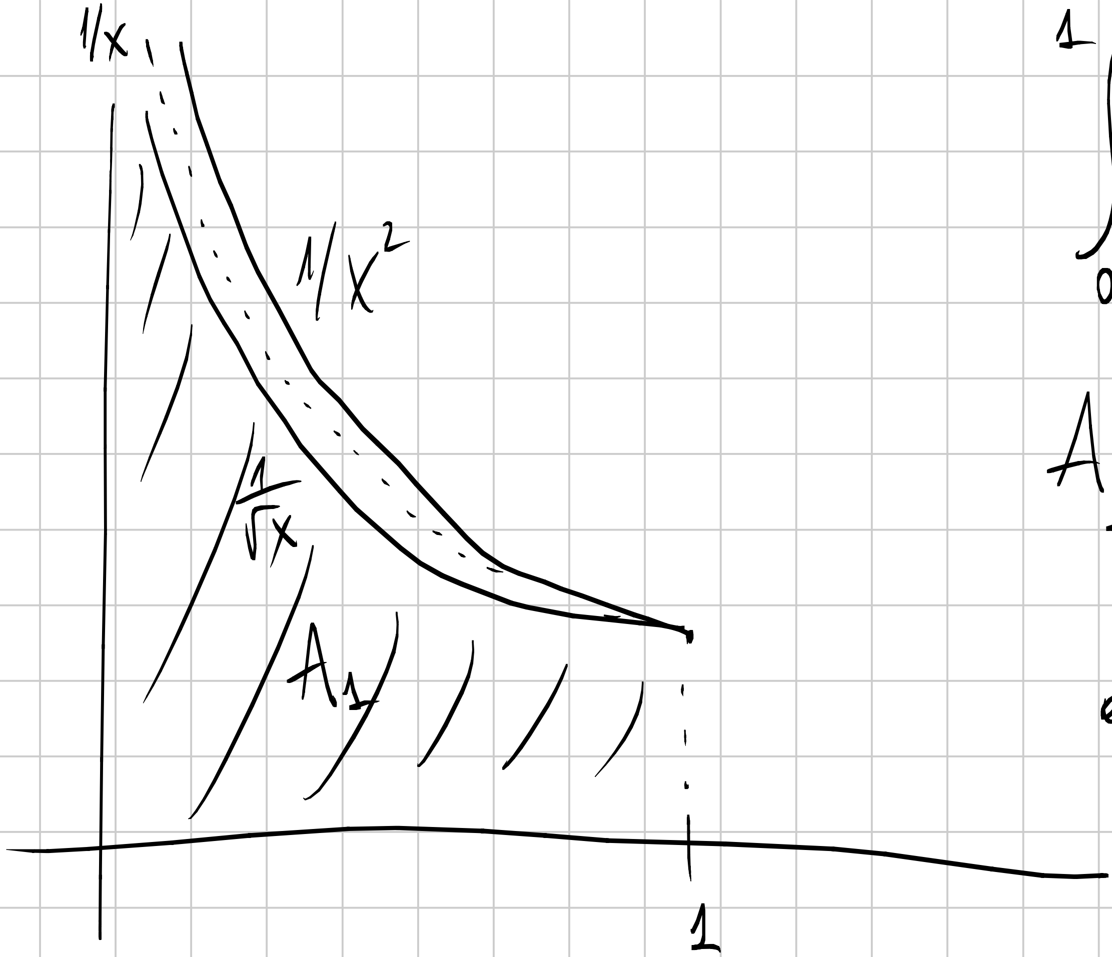
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in $(0,1]$ sse $\alpha < 1$

Se $\alpha \geq 1$ $\dfrac{1}{x^\alpha}$ non è integrabile in $(0,1]$

es. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in $(0,1]$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ non è integrabile in $(0,1]$.



$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$$

$A_1 = 2$ area sotto $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tra $(0,1)$

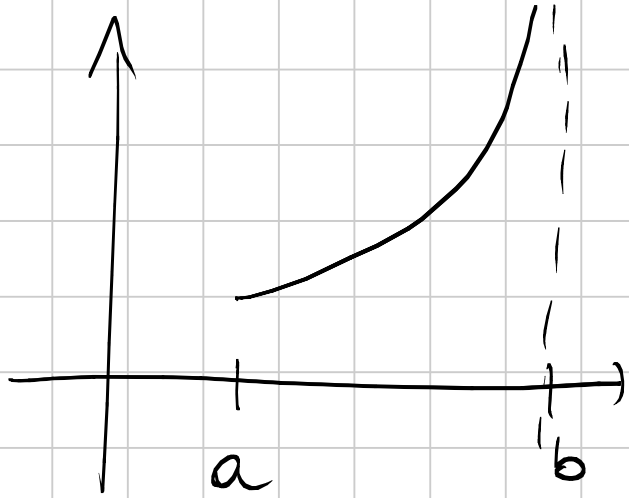
area sotto $\frac{1}{x^2}$ tra $(0,1)$

è $+\infty$

In generale

$\alpha > 0$

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$$



$x \to b^-$ $\quad f(x) \to +\infty$

è integrabile in $[a, b)$ $\iff \alpha < 1$

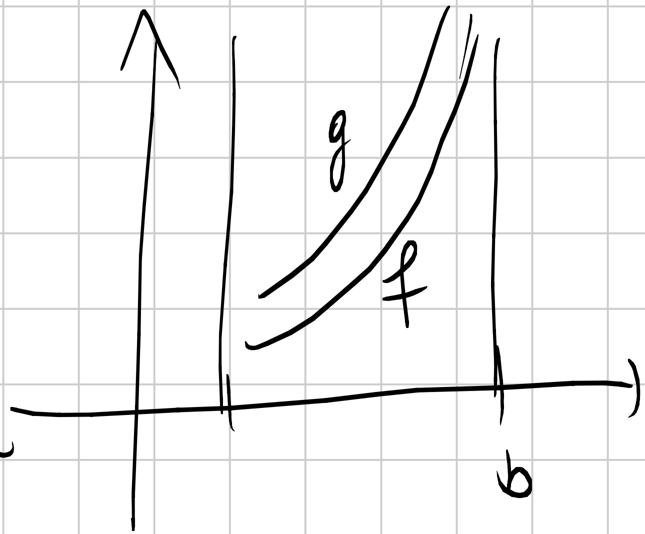
$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$$

è integrabile $\iff \alpha < 1$.

$x \to a^+$ $\quad f(x) \to +\infty$

Criteri di integrabilità per $f \geq 0$

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, continue $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$



Confronto

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

- se g è integrabile in $[a,b)$ $\Rightarrow$ f è integrabile in $[a,b)$

- se f non è integrabile in $[a,b)$ $\Rightarrow$ g non è integrabile in $[a,b)$.

Dim. poiché $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per la monotonia dell'integrale

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} g(x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \text{esiste finito.}$$

poiché per ipotesi g è integrabile esiste finito

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \text{anche } \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \ \exists \ (\text{perché } f \geq 0)$$

e finito perché è $\leq$ finito

Useremo il confronto con $\frac{1}{x^\alpha}$ o $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$

o $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$

es.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)+1\right) \text{ in } (0,1].$$

è integrabile in $(0,1]$?

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)+1\right) \le \underbrace{\frac{2}{\sqrt{x}}}_{\text{è integrabile in } (0,1]}$$

$$\Vert \qquad -$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ è integrabile in $(0,1]$

criterio del confronto asintotico

$f, g > 0$ e $f \sim g$, $x \to b^-$

$\left(f, g \to +\infty \atop x \to b^- \right)$

f è integrabile in $[a,b)$ $\Longleftrightarrow$ g è integrabile in $[a,b)$

Oss. se $f(x) \to +\infty$ $x \to 0^+$

si cerca di scrivere $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$

es. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$

con la def. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$ (provare voi)

$\operatorname{sen} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\qquad \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \sim \dfrac{1}{x} \quad x\to 0$

non è integrabile in $[0,1]$

dal confronto asintotico

$\Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ non è integrabile in $[0,1]$

es.

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x-1)^2}\,dx$$

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$(e^x-1)^2 \sim x^2$$

$$\frac{1}{(e^x-1)^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad x\to 0$$

non è integ.

non è integrabile

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1}\,dx$$

$$e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x}$$

$$f(x) = 1 + x + o(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) \sim 1 + x$$

$$\frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{integrable in } (0,1)}$$

integrable in $(0,1)$

es.

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx$$

è integrabile in $(2,3)$

$$\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx$$

$$x^2-4=(x-2)(x+2) \sim 4(x-2)$$
$x \to 2$

$$(x^2-4)^{1/3} = (x-2)^{1/3}(x+2)^{1/3} \sim (x-2)^{1/3}\, 4^{1/3}$$

$$x \to 2$$

$$\frac{1}{(x^2-4)^{1/3}} \sim \frac{1}{4^{1/3}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-2)^{1/3}}}_{\text{integrable in } (2,3)}$$

integrable in $(2,3)$.

$\sim \cdot \sim$

Integrazione di alcune funzioni razionali

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$, $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi

$$f(x) = \frac{x^2}{3x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{5x}{3x^3+8}$$

1° caso

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \int \frac{1}{t}\frac{1}{a}\,dt$$

$ax+b=t$

$a\,dx = dt$

$dx = \frac{1}{a}\,dt$

$$= \frac{1}{a}\log|ax+b| + K$$

2° caso

$$f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$ax^2+bx+c=0$

ha 2 radici distinte $\Delta>0$

quadrato perfetto $\Delta=0$

non ha radici reali $\Delta<0$

2 radici distinte $\Delta > 0$

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$\int \frac{1}{(x-3)(x-2)}\, dx$$

$$\frac{1}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-2)}} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{Ax-2A+Bx-3B}{\cancel{(\ )}\cancel{(\ )}}$$

$$1 = (A+B)x - 2A - 3B \quad \forall x$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} B=-A \\ -2A+3A=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)}\,dx - \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$$

• quadrato perfetto $(\Delta = 0)$

<u>es.</u> $$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} x+1=t \\ dx = dt \end{array} \right) \qquad = -\frac{1}{(x+1)} + K$$

- non ci sono radici reali $\Delta < 0$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$x^2+x+1 = \underbrace{x^2+x+\frac{1}{4}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{-\frac{1}{4}+1}$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) = t \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx = dt \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

$$= \frac{\cancel{4}^{\,2}}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\,dt =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + K$$

<u>3° caso</u> $\quad f(x) = \dfrac{\text{polinomio di grado 1}}{\text{polinomio di grado 2}}$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \int \frac{Ax}{ax^2+bx+c} + \underbrace{\int \frac{B}{ax^2+bx+c}}_{\text{appena fatto}}$$

$$\Downarrow$$

$$A\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta > 0$

es.

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$$= \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}$$

$$x = (A+B)x - 3A - 2B$$

$$\begin{cases} 1 = A+B \\ 0 = -3A-2B \end{cases} \Rightarrow A, B \Rightarrow \int \frac{A}{(x-2)}dx$$

$$e \int \frac{B}{(x-3)}dx$$

es. $\Delta = 0$

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+1)}dx = \qquad x^2+2x+1 = t$$

$$(2x+2)dx = dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}\,dx =$$

$x^2+2x+1=t$

$(2x+2)\,dx=dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2}{x^2+2x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+1| + \frac{1}{(x+1)} + K$$

$\underline{\Delta < 0}$ $\underline{es.}$ $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

$x^2+x+1=t$

$(2x+1)\,dx=dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$t = x^2 + x + 1$

fatto prima

$$\frac{1}{2} \log |x^2 + x + 1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\dots)$$

4. $$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx =$$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{t}{2+t}\, 2t\,dt$$

$$2t\left(\frac{t}{2+t}\right) = 2t\left(\frac{t+2-2}{2+t}\right) =$$

$$2t\left(1 - \frac{2}{2+t}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int 2t\,dt}_{\text{o.k}} - \underbrace{\int \frac{4t}{2+t}\,dt}_{4\int \frac{t}{2+t}\,dt}$$

$$\int \frac{t+2-2}{2+t}\,dt = \int \left(1 - \frac{2}{2+t}\right)dt$$

$$= \dots$$

Funzioni razionali di e^x

$$e^x = t$$

es. $$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+5}\,dx = \qquad e^x dx = dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt \qquad \Delta < 0$$

$$t^2 + 2t + 1 - 1 + 5 = (t+1)^2 + 4$$

... fine

Funzioni razionali in $\overline{\operatorname{sen} x}$, $\overline{\cos x}$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx \qquad \int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\, dx$$

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \qquad \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cancel{1}+t^2+2t-\cancel{1}+t^2}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2+2t}\,dt = \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \dots$$