Lezione del 17 Novembre

Proprietà globali delle funzioni continue

funzioni continue in un intervallo.

f è continua in c $\iff$ $\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$

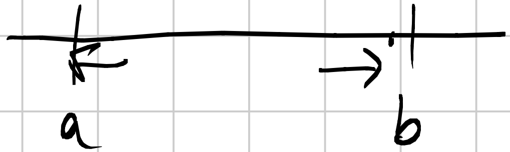
f è continua in $\underset{\text{intervallo}}{I} = (a,b)$ $\iff$ f è continua $\forall x \in (a,b)$

$\forall x_n \to c$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$$

è equivalente alla continuità

f continua in $[a,b]$

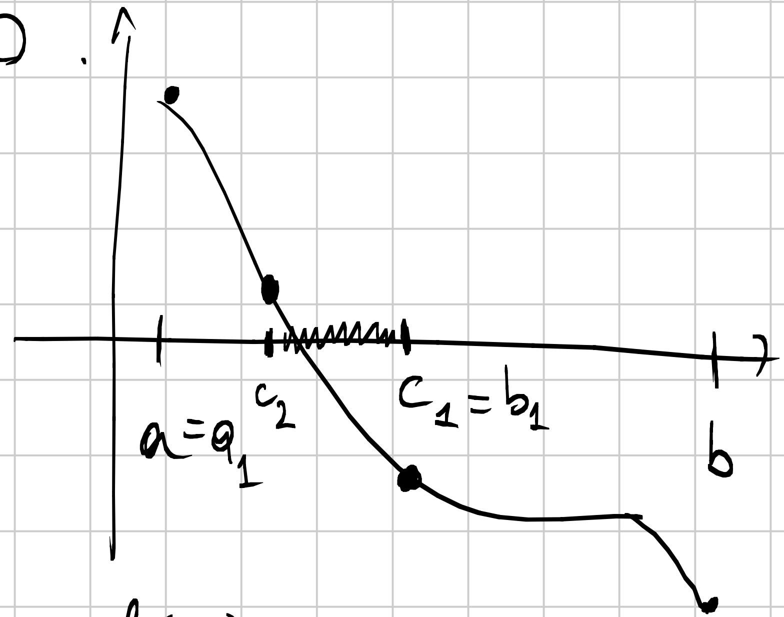


f è continua $\forall x \in (a,b)$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Teorema degli zeri Sia f continua in $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$.



Dim (metodo di bisezione)

$$c_1 = \frac{a+b}{2}$$ p.to medio di (a,b)

$f(c_1) = 0$ fine. guardo se $f(c_1) < 0$ o > 0

e prendo l'intervallo t.c. $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ oppure $f(b) \cdot f(c_1) < 0$

nel mio disegno scelgo $(a, c_1) = (a_1, b_1)$

$(a, b) \rightarrow (a_1, b_1)$ $\qquad b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$

prendo c_2 p.to medio del (a_1, b_1)

$f(c_2) = 0$ fine del procedimento

sennó mi prendo l'intervallo che chiamo (a_2, b_2)

t.c. $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$ $\qquad b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{4}$

e vado avanti nel procedimento

(a_n, b_n) $\qquad a_n$ successione degli estremi sx degli intervalli

b_n successioni degli estremi dx degli intervalli

$$a \le a_n \le a_{n+1} \cdots \le b \qquad \forall n$$

a_n è monotone crescente e limitata

per il teorema delle successioni monotone $\exists$ finito

$$\lim_n a_n = l$$

$$a \le b_{n+1} \le b_n \cdots \le b$$

b_n è monotone decrescente e limitata

$\exists$ finito $\lim_n b_n$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

$n \to +\infty$

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

quindi $\lim_n b_n = l$

Quindi $\lim_n a_n = \lim_n b_n = l$

Noi vogliamo dim. che $f(l) = 0$

cioè che l è uno <u>zero</u> di f

$f(a_n) > 0 \quad , \forall n$

$f(b_n) < 0 \quad , \forall n$

$f(a_n) \to f(\ell)$ ✓

$f(b_n) \to f(\ell)$

se $a_n \to \ell$

$b_n \to \ell$

perché f è continua in $[a,b]$

$f(a_n) > 0 \Rightarrow f(\ell) \geq 0$

$f(b_n) < 0 \Rightarrow f(\ell) \leq 0$

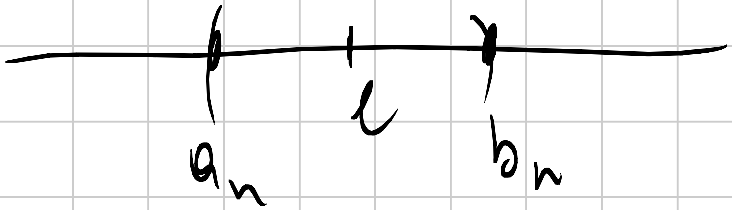
(teo. della permanenza del segno
$c_n > 0 \Rightarrow c \geq 0$
$c = \lim_n c_n$)

$\Downarrow$

$f(\ell) = 0$ #

OSS. Si trova un algoritmo per stimare dove è lo zero. Il valore approssimato di l è a_n o b_n se ci si arresta a n passi e l'errore commesso è $\leq \dfrac{b-a}{2^n}$

ampiezza di (a_n, b_n)



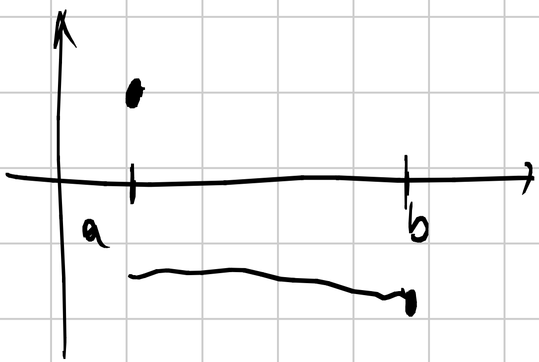
$[a, b] = [0, 1] \qquad b - a = 1$

$$E = \frac{1}{2^n}$$

OSS. se in $[a,b]$ ci sono più zeri il procedimento non dice quale si determina.

OSS. Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie

se f non è continua



f continua in $(a,b]$

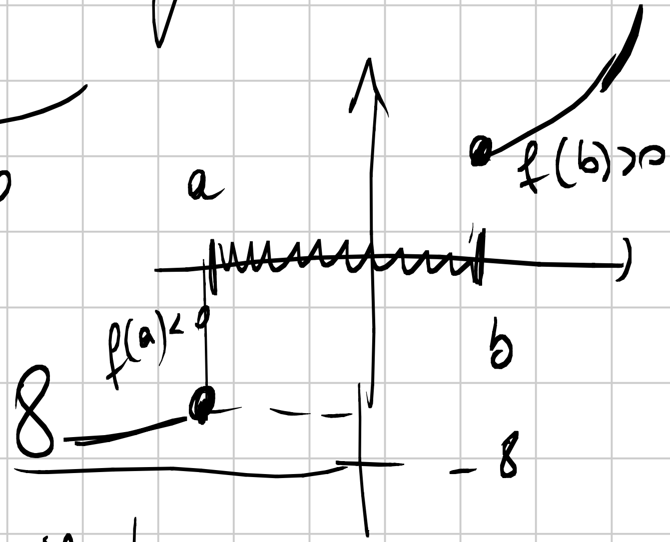
Teo. f continua in (a,b) t.c. $f(a)f(b)<0$

$\Rightarrow \exists$ uno zero.

<u>Applicazione</u> $f(x) = 0$ voglio risolvere

$x \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -8$

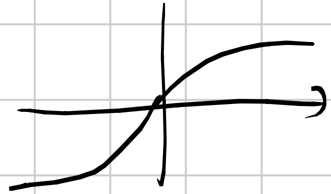


f è continua in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ per il teorema degli zeri

$\exists\, \bar{x}$ $f(\bar{x}) = 0$

Es. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha almeno una soluzione per $x \geq 1$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{a}{x}, \quad x \geq 1$$



vedo se $f(x)$ ha zeri che saranno le soluzioni della mia equazione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{a}{x}$$

- $a < 0$ $\qquad -\frac{a}{x} > 0$

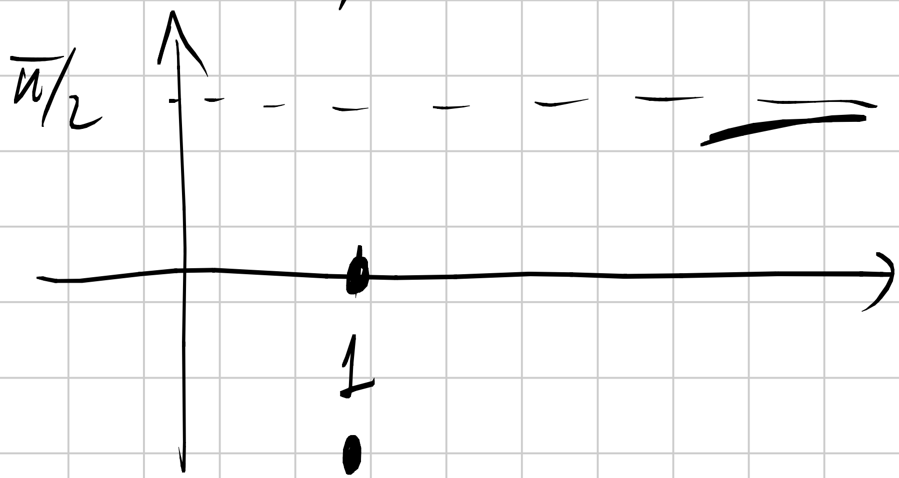
$f(x) > 0 \quad \forall x \geq 1$

$\nexists$ soluzione dell'equazione

- $a = 0$ $\quad f(x) = \operatorname{arctg} x > 0 \quad \forall x \geq 1$

- $a > 0$ $\quad f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{a}{x} \qquad x \geq 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$



$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 - a = \frac{\pi}{4} - a$$

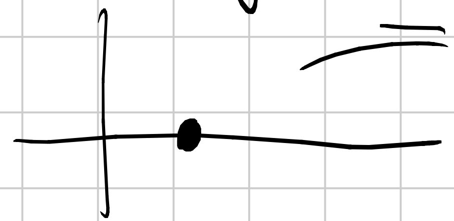
se $f(1) < 0$ poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2$ il Teo. degli zeri ci dice che $\exists\ \bar{x} \geq 1$

A.c. $f(\bar{x}) = 0$ cioè una soluzione dell'equazione

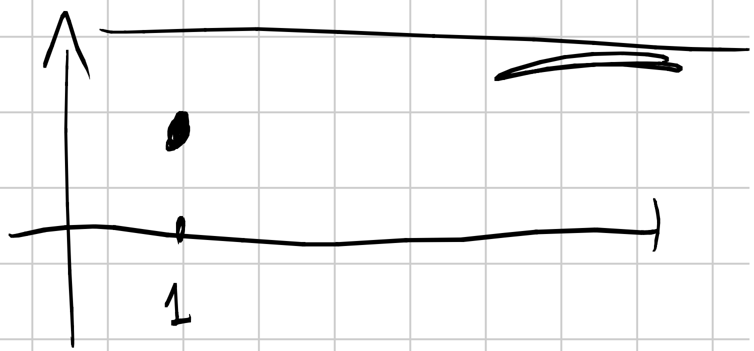
$f(1) = \frac{\pi}{4} - a < 0$ cioè $a > \frac{\pi}{4}$

quindi $a > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \exists$ almeno una soluzione dell'equazione per $x \geq 1$

$a = \frac{\pi}{4}$ $f(1) = 0$ 1 è uno zero



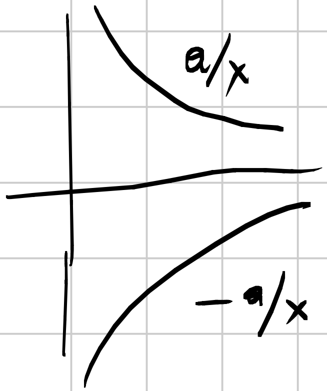
$a < \frac{\pi}{4}$ $f(1) > 0$



$$f(x) = \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{crescente}} \underbrace{- \frac{a}{x}}_{\text{crescente}}$$

$\operatorname{arctg} x$ crescente

$\frac{a}{x}$



$\Rightarrow$ $f(x)$ è somma di due funzioni crescenti

$\Rightarrow$ $f(x)$ crescente

$a \leq 0$ $\quad\nexists$ soluzioni

$a \geq \pi/4$ $\quad$ esiste una soluzione dell'eq.

$a < \pi/4$ $\quad\nexists$ soluzioni

Teorema di Weierstrass

Def. f definita in $[a,b]$

M è il <u>massimo</u> di f se $\exists\ x_M \in [a,b]$:

$$f(x_M) = M \quad e \quad f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b]$$

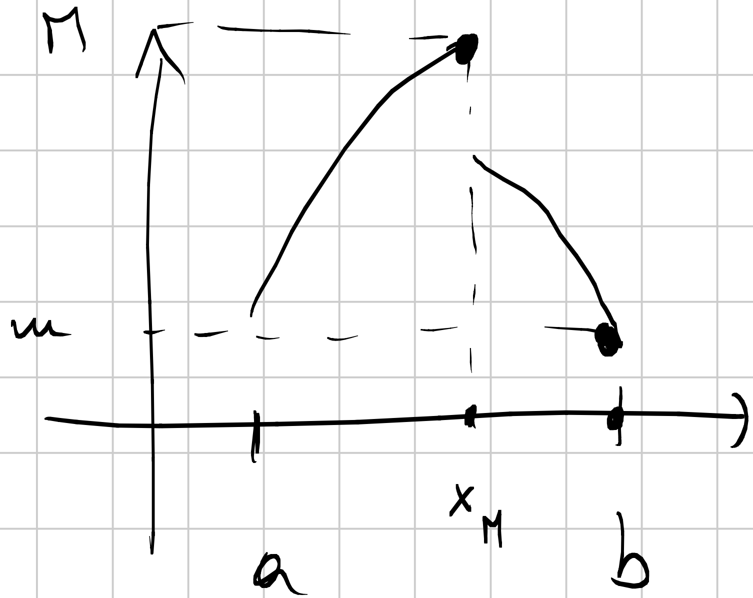
$x_M =:$ punto di massimo

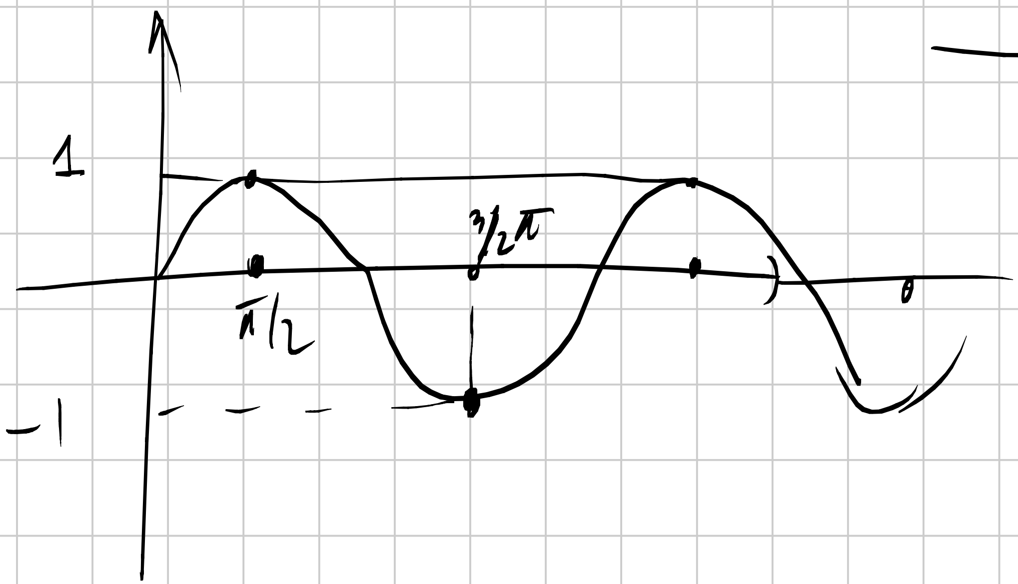
m è il <u>minimo</u> di f se $\exists\ x_m \in [a,b]$:

$$f(x_m) = m \quad e \quad f(x) \geq m,\ \forall x \in [a,b].$$

X_M = p.to di massimo

b = p.to di minimo.





$M = 1$

$X_M = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

infiniti p.ti di max

$m = -1$

$X_m = \frac{3}{2}\pi + 2K\pi$

Teorema di Weierstrass

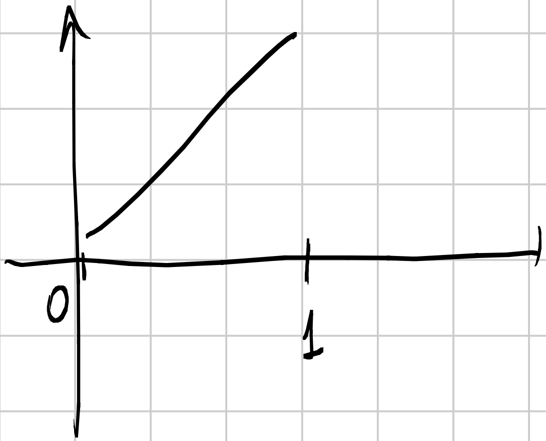
f continua in $[a,b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$ cioè esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$\underbrace{f(x_m)}_{=m} \le f(x) \le \underbrace{f(x_M)}_{=M} \quad \forall x \in [a,b]$$

<u>Dim</u> no.

<u>OSS.</u> tutte le ipotesi sono necessarie

es. 1 f continua in (a,b) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\exists$ max e min in (a,b).



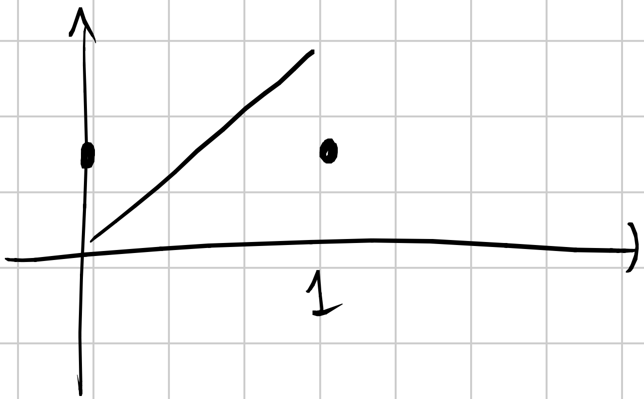
$f(x) = x$ in $(0,1)$

NO!

es. 2 f continua in un intervallo illimitato $[0,+\infty)$

$f(x) = x$

es. 3 f in $[a,b]$ ha max e min



$$f(x)=\begin{cases} x & (0,1) \\ 1/2 & x=0 \\ & x=1 \end{cases}$$

f definita in $[0,1]$

ma continua solo in $(0,1)$

non è continua in $x=0$ e $x=1$

$\Rightarrow \nexists$ max e min in $[0,1]$.

Teorema dei valori intermedi

f continua in $[a, b]$.

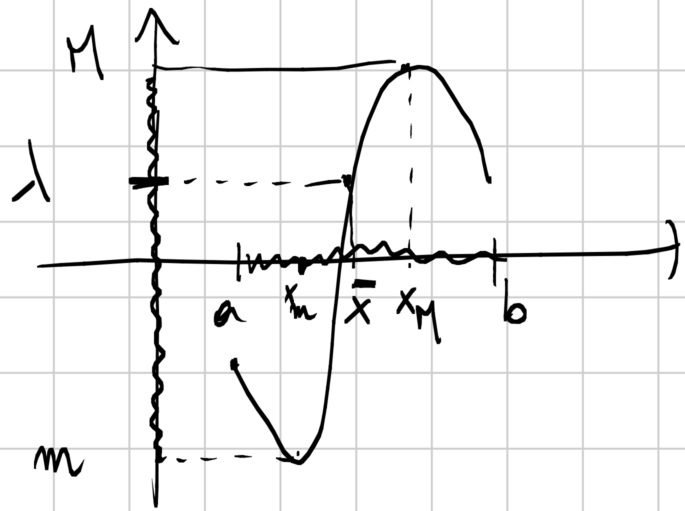
$\forall \lambda : \quad m \leq \lambda \leq M, \quad \exists$

$\bar{x} \in [a, b]$ t.c. $f(\bar{x}) = \lambda$

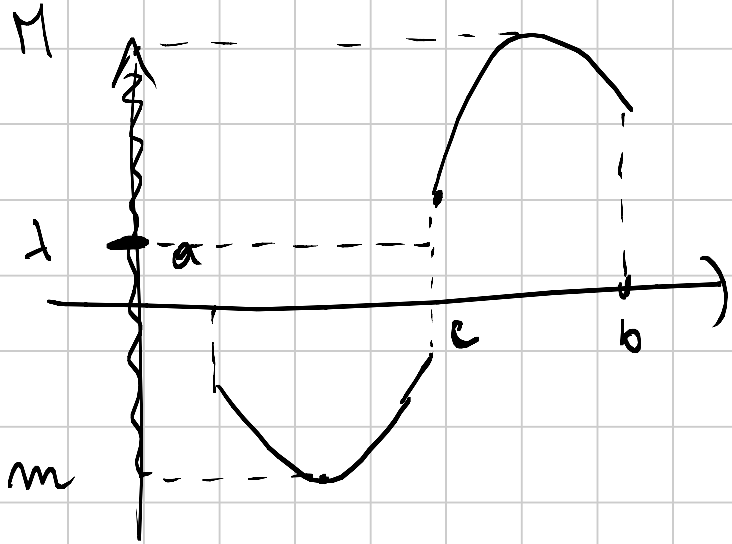
(f assume tutti i valori tra m e M)

$\exists\, m, M$ minimo e max di f in $[a, b]$

$m \qquad M$



- se <u>f non è continua</u>



Il teorema dei valori intermedi ci dice che se f è continua in $[a,b]$

$$f([a,b]) = [m, M]$$

Dim (del teorema dei valori intermedi)

devo dim. che $\exists\ \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = \lambda$

cioè $\exists\ \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) - \lambda = 0$

$g(x) \doteq f(x) - \lambda$ dim. che $\exists$ uno zero della funzione g

g è continua cioè un $\bar{x} : g(\bar{x}) = 0$

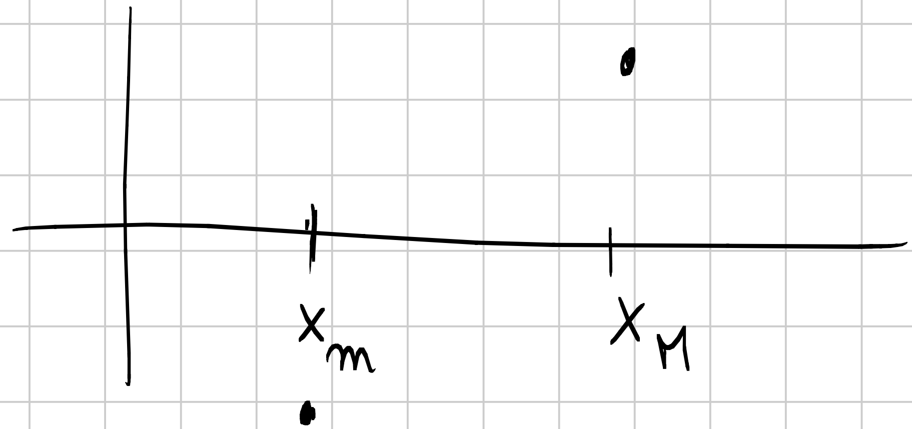
Dal teo. di Weierstrass perché f è continua in $[a,b]$ $\exists\ x_M : f(x_M) = M$ massimo di f

$\exists\ x_m : f(x_m) = m$ minimo di f

$$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda \geq 0$$

$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda \leq 0$$

per il teo. degli zeri all'intervallo $[x_m, x_M]$

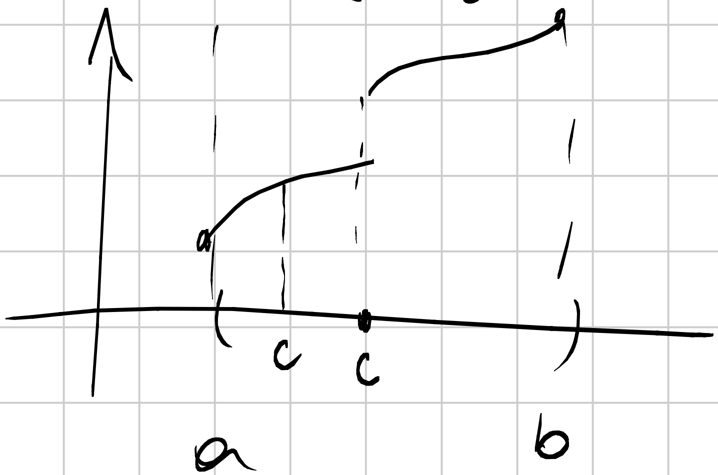


$$\exists\ \bar{x} \in [x_m, x_M] : \quad g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - \lambda$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) = \lambda$$

$\#$

Teo. sulle discontinuità delle funzioni monotone.

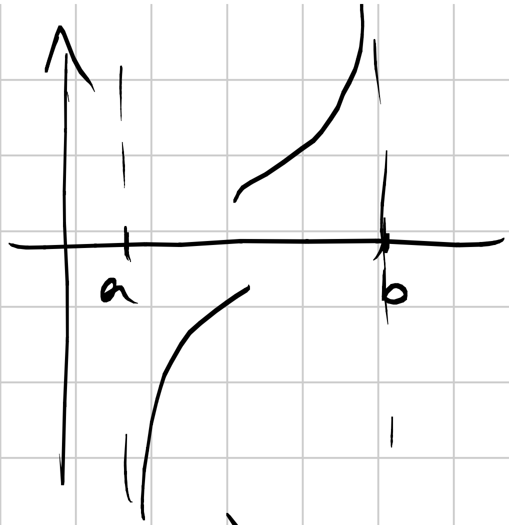


Teo. (di monotonia)

f monotona in (a,b)

allora $\forall\, c \in (a,b)$ esistono finiti $\lim_{x\to c^+} f(x)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e in a e b esistono i limiti (dx, sx) eventualmente infiniti

<u>oss.</u> le funzioni monotone su intervalli se hanno discontinuità sono solo di salto (eccetto in a e b, dove ci possono essere asintoti verticali).



<u>Classificazione delle discontinuità di una funzione</u>

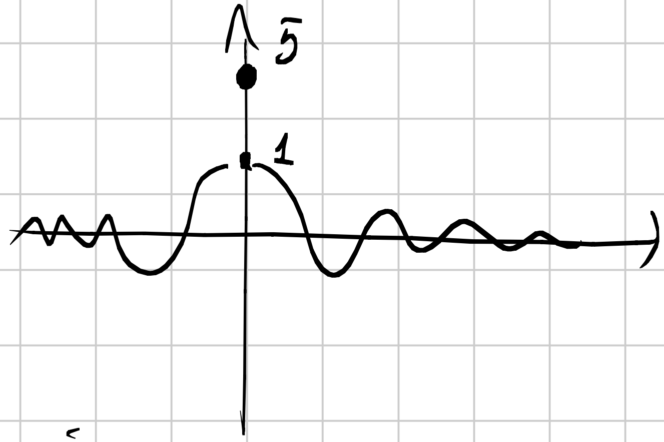
1) discont. <u>eliminabile</u>

<u>es.</u>

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x} & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 5 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 5$$

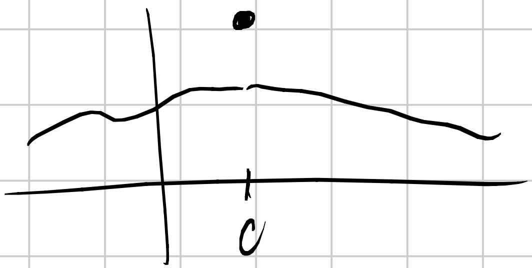
f non è continua in $x = 0$



"elimino" la discontinuità

definendo una nuova funzione

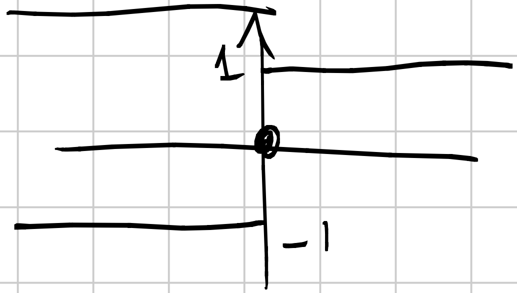
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



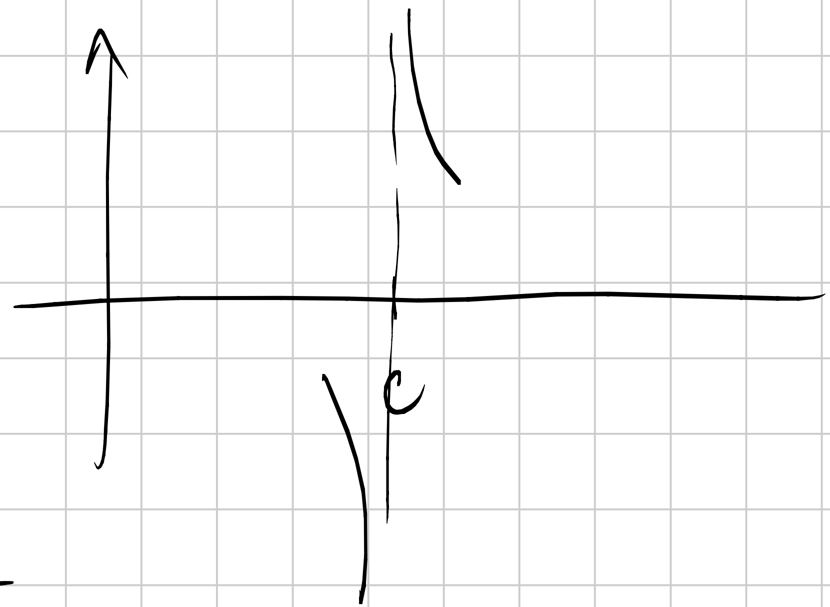
è continua anche in x_0

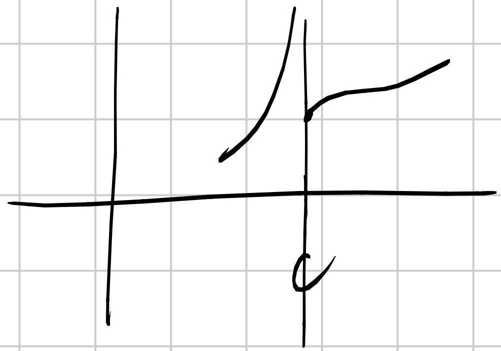
2) di salto (di 1^a specie) $\quad \exists \lim_{x\to c^+}$ e $\lim_{x\to c^-}$ finiti ma diversi

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



3) tutto il resto (di 2^a specie)





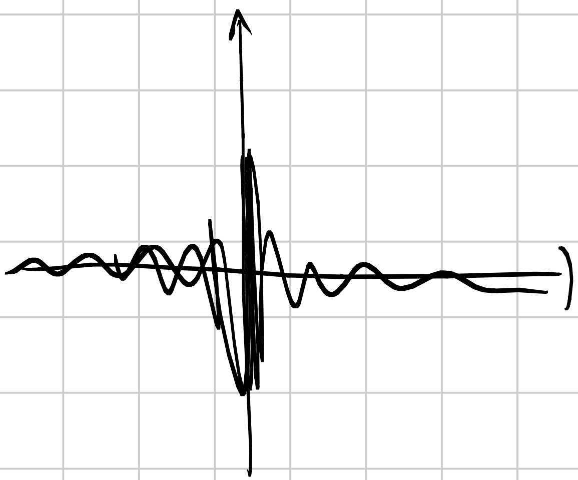
es. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

dominio $= \mathbb{R}$

$\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non è def. in $x=0$ — non posso studiare la continuità in $x=0$

$f(x)$ è continua in $x=0$?

? $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$



$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \nexists$

$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \nexists$

Continuità delle funzioni inverse

Teo. f continua in (a,b)

f è invertibile in (a,b) $\iff$ f è strett. monotona in (a,b)

(e la sua inversa è continua e strett. monotona).

f strett. monot. $\Rightarrow$ f invertibile (sempre non solo per le f continue)

f invertibile $\not\Rightarrow$ f strett monotona

f invertibile + f continua $\Rightarrow$ f strett. monotona.

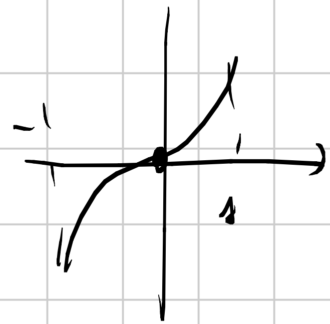
Da questo teorema si ha che

l'inversa di una funzione continua è continua

arcsen x, arccos x, arctg x, log x

arccosh x, ... sono continue

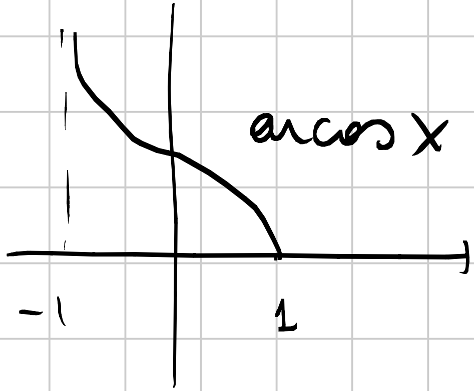
$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{arcsen } x}{x} = 1$$



$$\arcsin x = y \iff x = \operatorname{sen} y$$

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1$$



es. $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{1 - x}$

$$x = \cos y \iff \arccos x = y$$

$$x \to 1^- \qquad y \to 0^+$$

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{y}{1-\cos y} \cdot \frac{y}{y} = +\infty$$

y^2

$$\frac{1-\cos y}{y^2} \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{1}{2}$$