19 Gennaio 2012

Topologia in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$ dominio

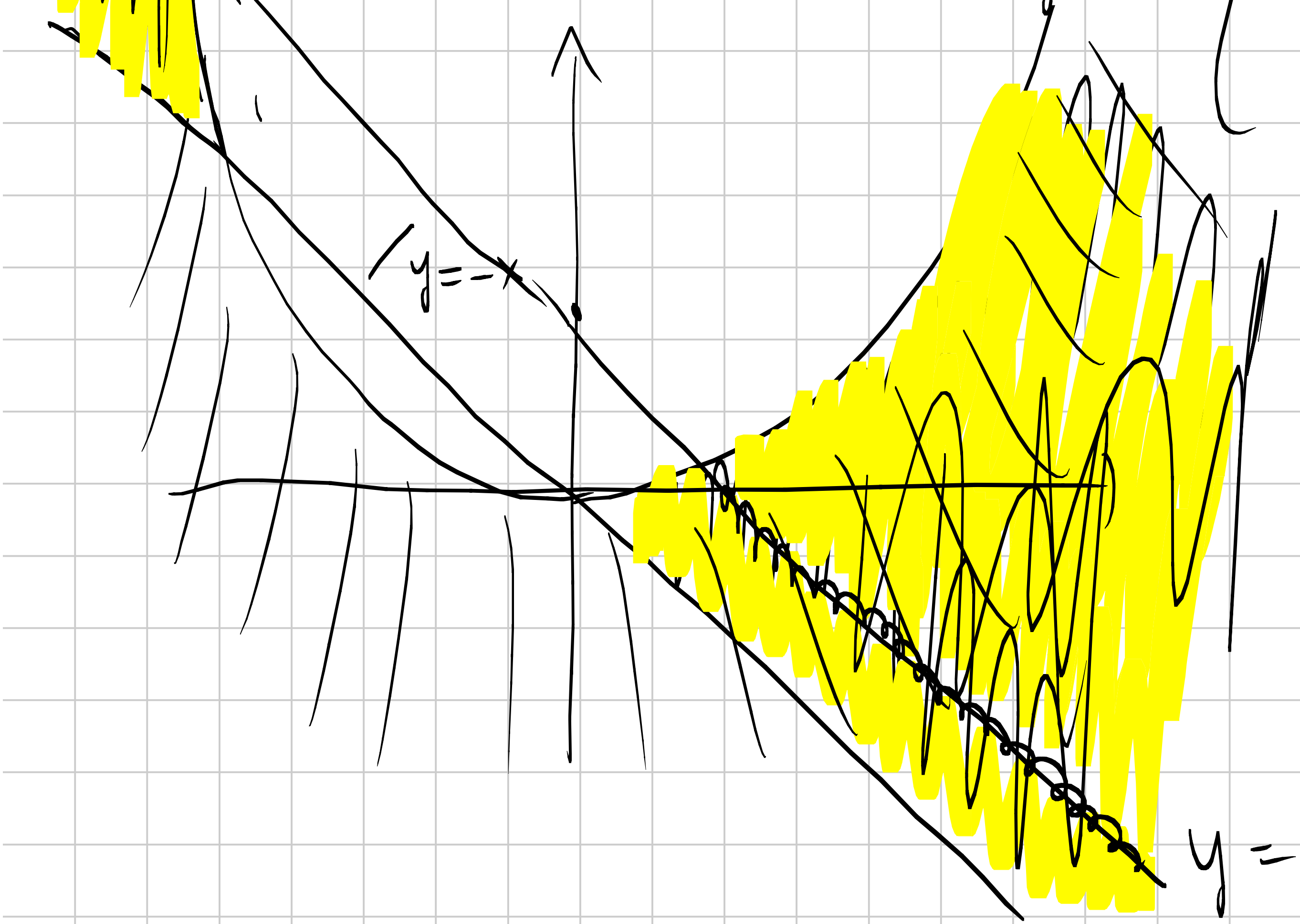
(a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$ e unione di questi intervalli

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$

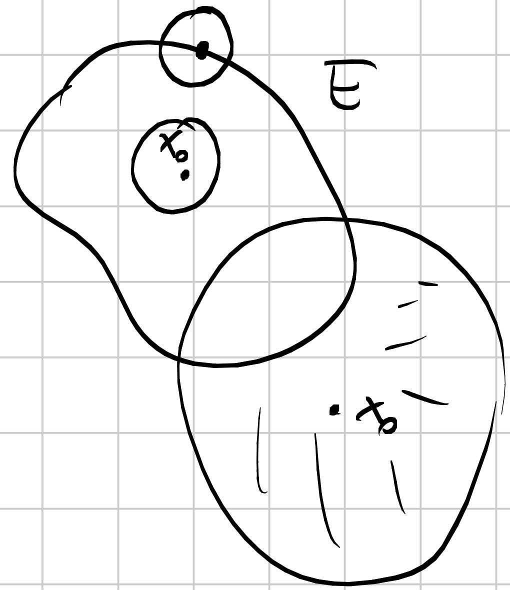
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y}}{\log(x+y)}$$

$$\begin{cases} y \le x^2 \\ y > -x \\ y + x \ne 1 \end{cases}$$

$$y \ne 1 - x$$

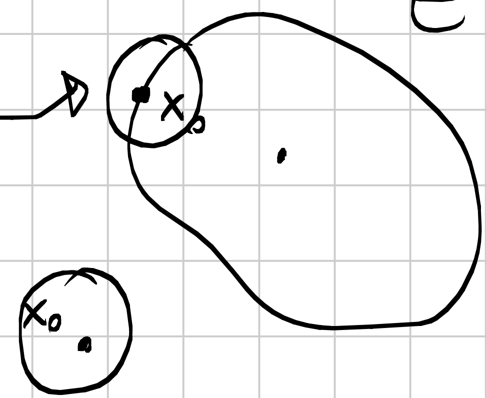


Def. $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice

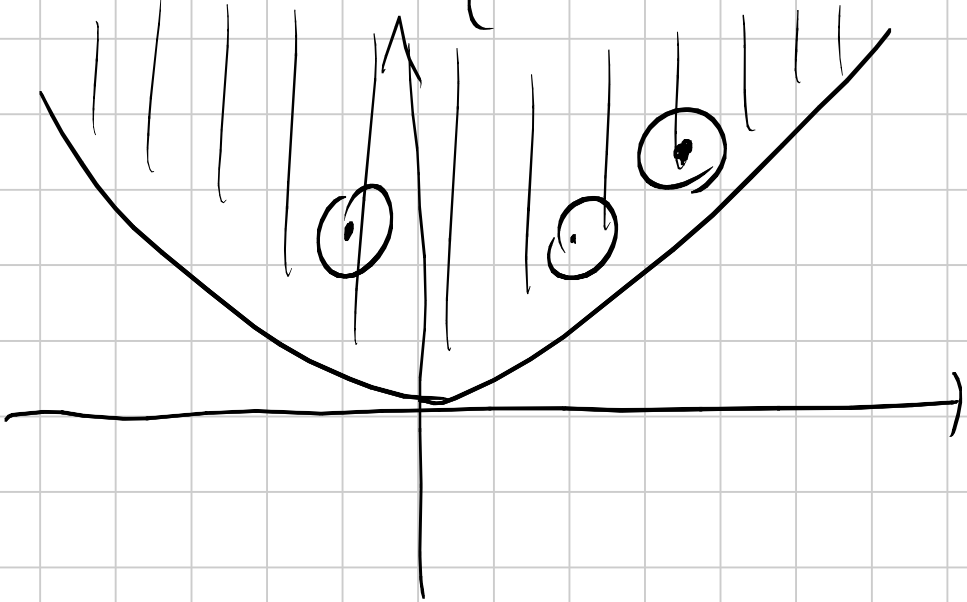


interno ad E se esiste un intorno sferico di x_0 contenuto in E.

esterno ad E se esiste un intorno sferico di x_0 contenuto nel complementare di E



di **frontiera** per E se non è né interno, né esterno es. $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \}$



i punti interni ad E
sono i p.ti di E

i p.ti esterni ad E
$\{ y < x^2 \}$

p.ti di frontiera
$\{ y = x^2 \}$ non appartengono ad E.

In generale

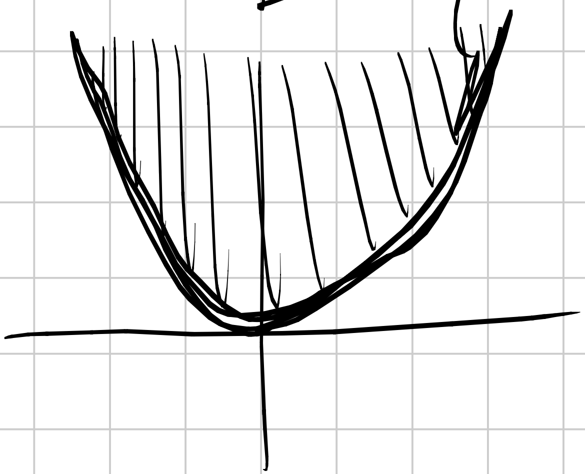
x_0 interno ad $E \implies x_0 \in E$

x_0 esterno ad $E \Rightarrow x_0 \notin E$

x_0 è di frontiera per $E \Rightarrow x_0$ può appartenere o no ad E

dipende dalla def. di E

es. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x^2\}$



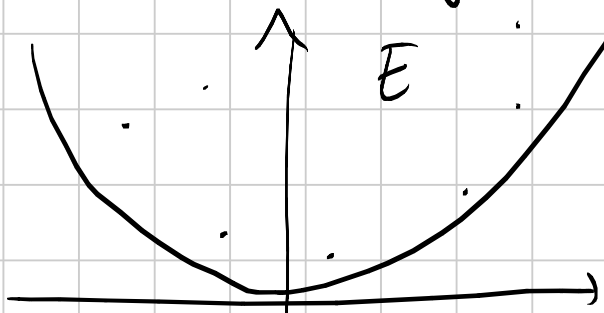
punti di frontiera di E_1

$\{y = x^2\}$

appartengono ad E_1.

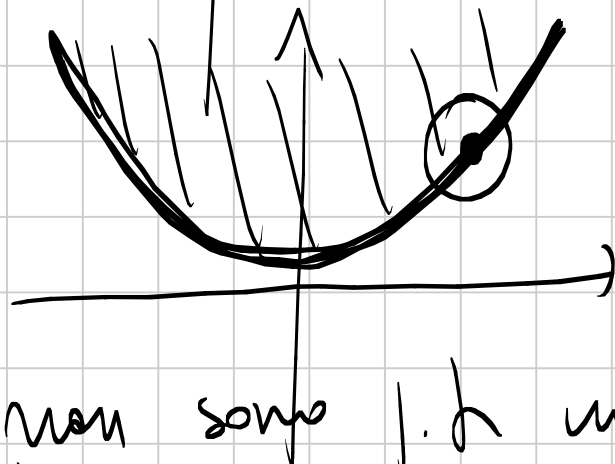
Def. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **aperto** se ogni suo p.to è interno; è **chiuso** se il complementare di E è aperto.

es. $E = \{ y > x^2 \}$

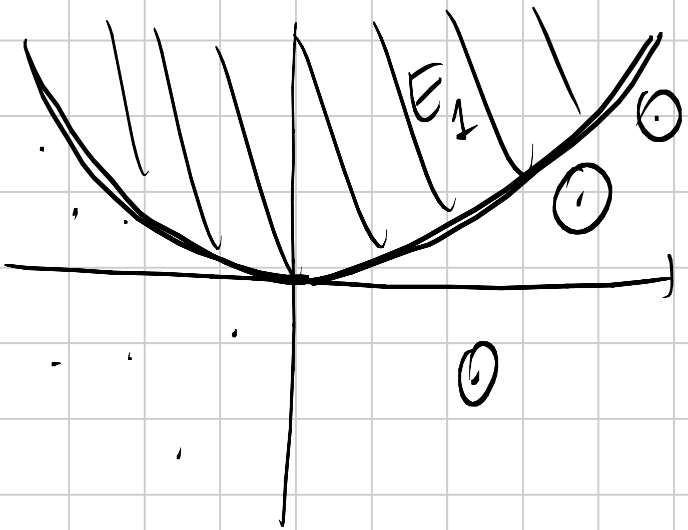


è aperto

$E_1 = \{ y \geq x^2 \}$



non è aperto perché i p.ti sulla parabola **non** sono p.ti interni



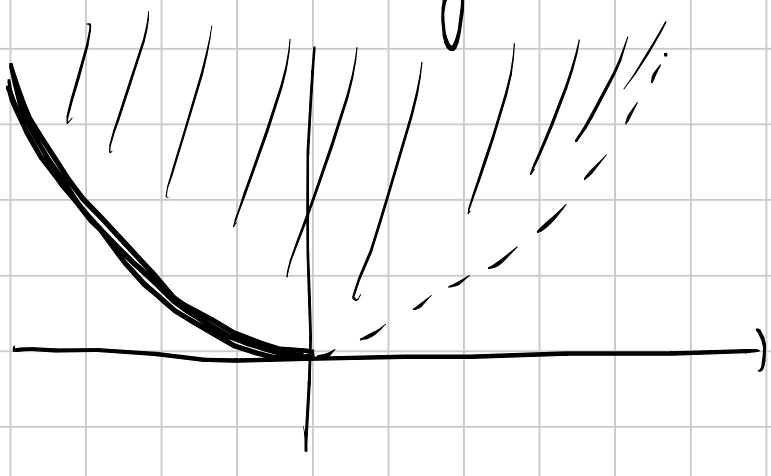
complementare di E_1

$= \{ y < x^2 \}$

è aperto

E_1 è chiuso

Un insieme può essere né aperto né chiuso

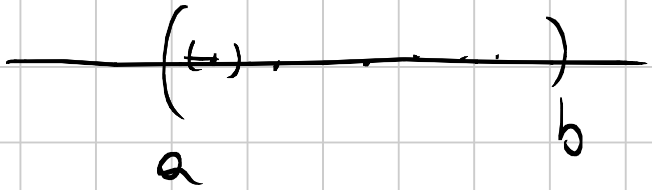


$E = \{ y > x^2,\ x \geq 0 \} \cup$

$\{ y \geq x^2,\ x < 0 \}$

in $\mathbb{R}$

(a,b) aperto



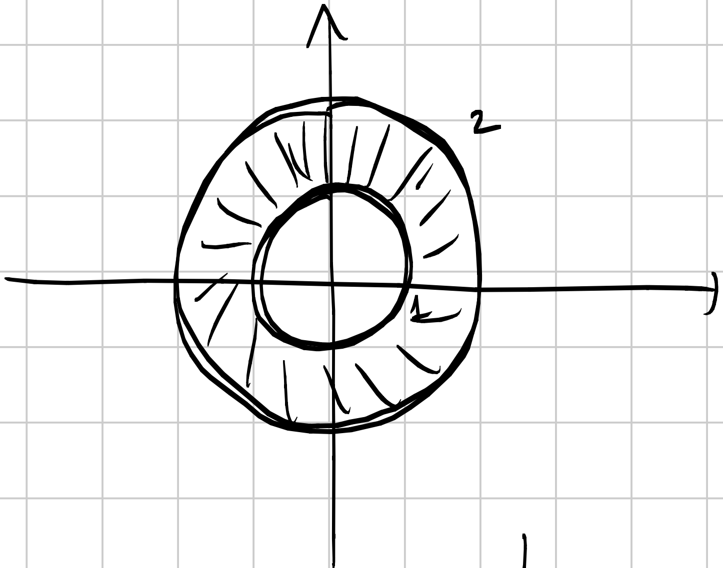
$[a,b]$ chiuso

$[a,b)$ né aperto, né chiuso

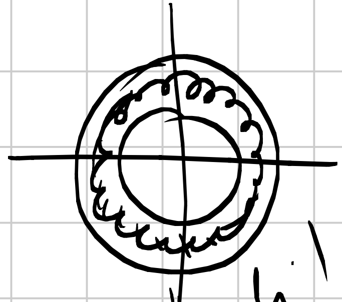
$(a,+\infty)$ aperto

$[a,+\infty)$ chiuso

Es. $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \}$



B è <u>chiuso</u>

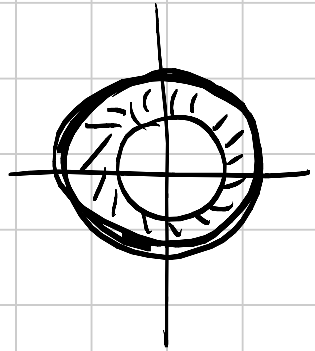


$$B_1 = \{ 1 < x^2 + y^2 < 4 \}$$

no bordi!

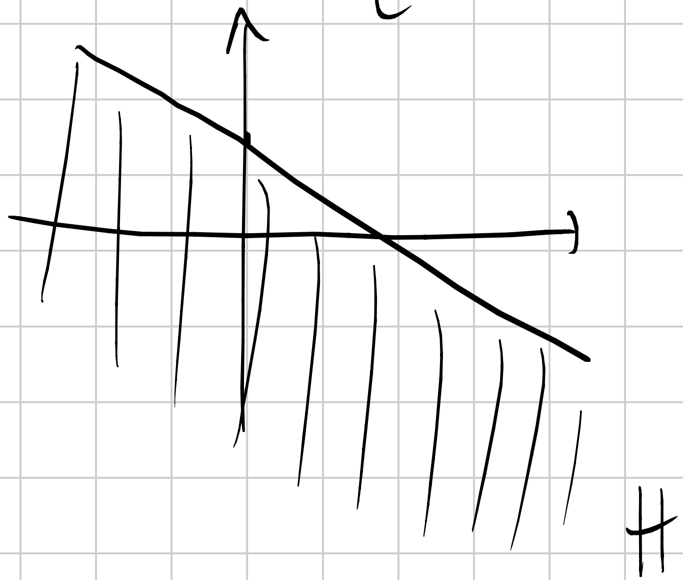
è aperto

$$\bar{B} = \{ 1 < x^2 + y^2 \le 4 \}$$



né aperto, né chiuso.

es. $H = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x + y < 3 \}$



$2x + y = 3$

$y = 3 - 2x$

$y < 3 - 2x$

aperto.

— · —

Caratterizzazione degli insiemi aperti e chiusi con le funzioni continue.

(Teo. 3.5)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}^n$.

$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) > 0 \}$ aperto

$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) < 0 \}$ aperto

$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) \neq 0 \}$ aperto

$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) \geq 0 \}$

$\{ \quad " \quad f(\underline{x}) \leq 0 \}$ chiusi

$\{ \quad : f(\underline{x}) = 0 \}$

es. $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \}$ aperto

$$\underbrace{(y - x^2)}_{f(\underline{x})} > 0$$

$$f(\underline{x}) > 0$$

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geq x^2 \}$$

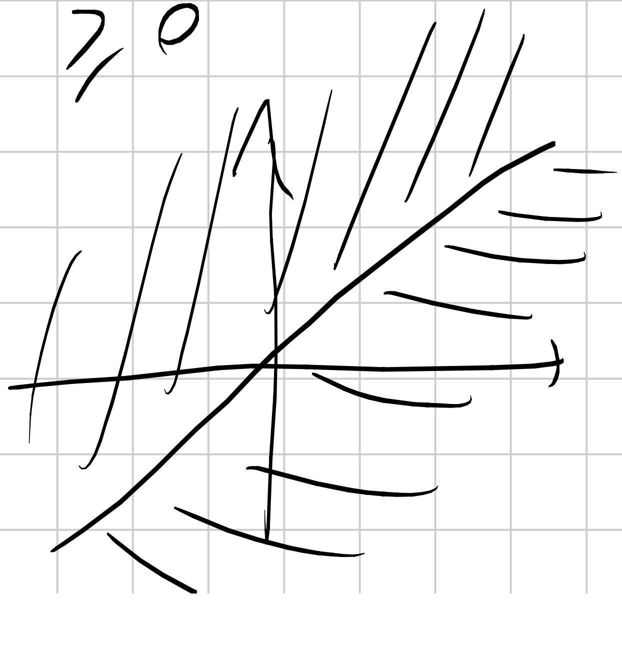
$$(y - x^2) \geq 0$$

$$f(\ ) \geq 0$$

<u>chiuso</u>

<u>es.</u> $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \neq x \}$

$$\underbrace{(y - x)}_{f} \neq 0$$

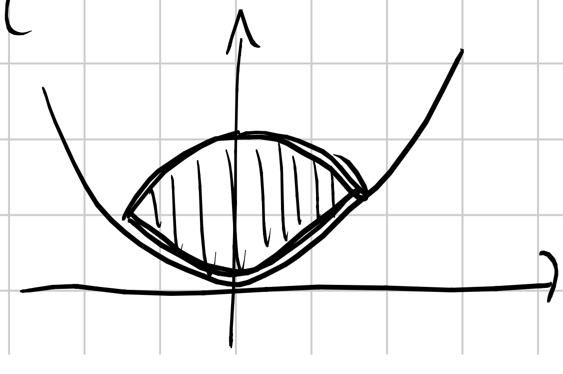


è aperto!

<u>proprietà</u> degli <u>aperti</u> e dei <u>chiusi</u>.

unione e intersezione di un numero finito di <u>aperti</u> è un insieme aperto, e analogamente per i <u>chiusi</u>

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x^2 \ \text{ e } \ x^2+y^2 \leq 1 \}$$



$E_1 = \{ y \geq x^2 \}$ chiuso

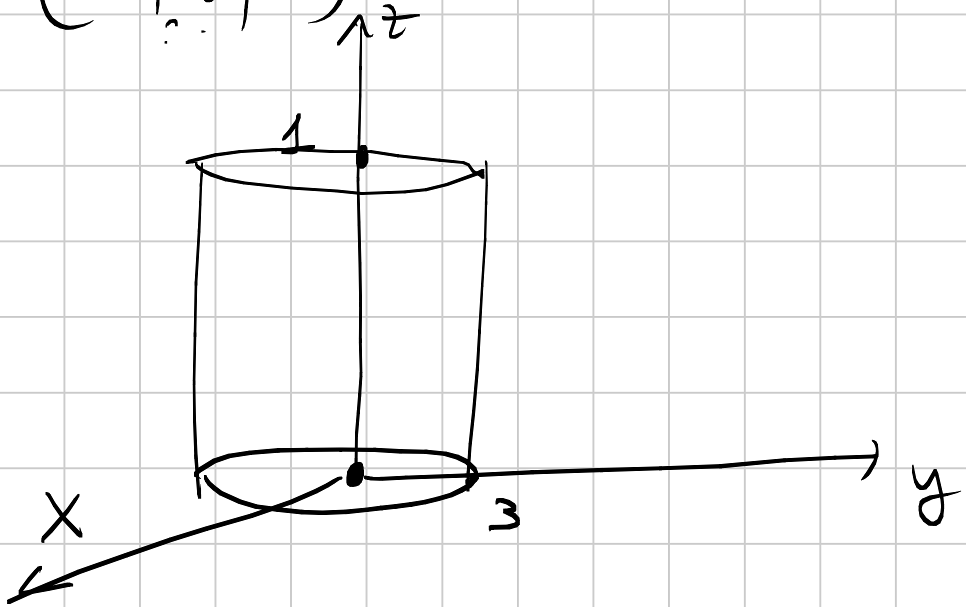
$E_2 = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$ chiuso

$E = E_1 \cap E_2 \implies E$ è <u>chiuso</u> perché intersezione di due chiusi

— · —

<u>es. in $\mathbb{R}^3$</u>

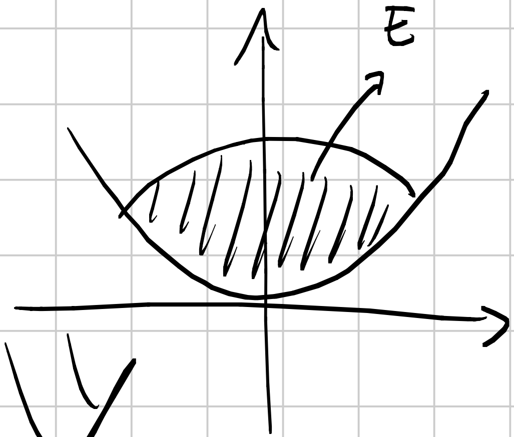
$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 0 \le z \le 1 \quad e \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{array} \right\}$$



cilindro

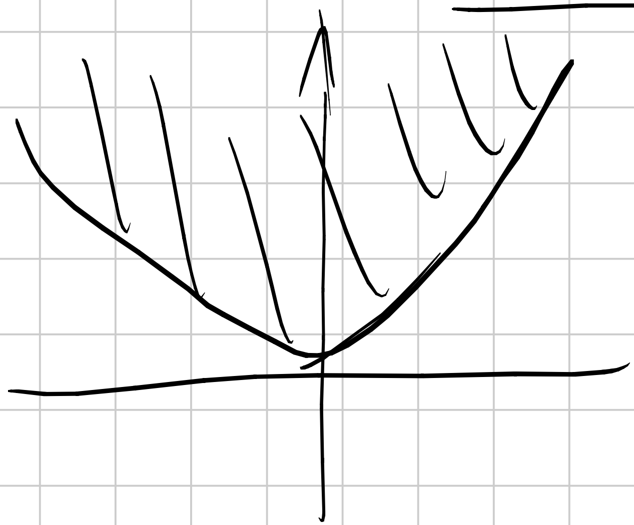
è <u>chiuso</u>

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è <u>limitato</u> se esiste un intorno sferico U_r t.c. $E \subset U_r$



es. $E = \{ y > x^2$ e $x^2 + y^2 < 1 \}$

è limitato



$E = \{ y > x^2 \}$

è illimitato.

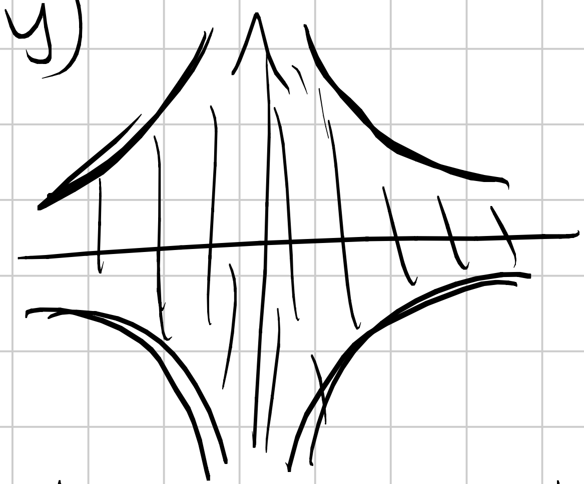
Teorema di <u>Weierstrass</u> $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua ed E chiuso e limitato. Allora f ha massimo e minimo in E.

<u>es.</u> $f(x,y) = \arcsin(xy)$

$$A = \{ |xy| \leq 1 \}$$

$$\underbrace{|xy| - 1}_{g} \leq 0$$

$$g \leq 0$$

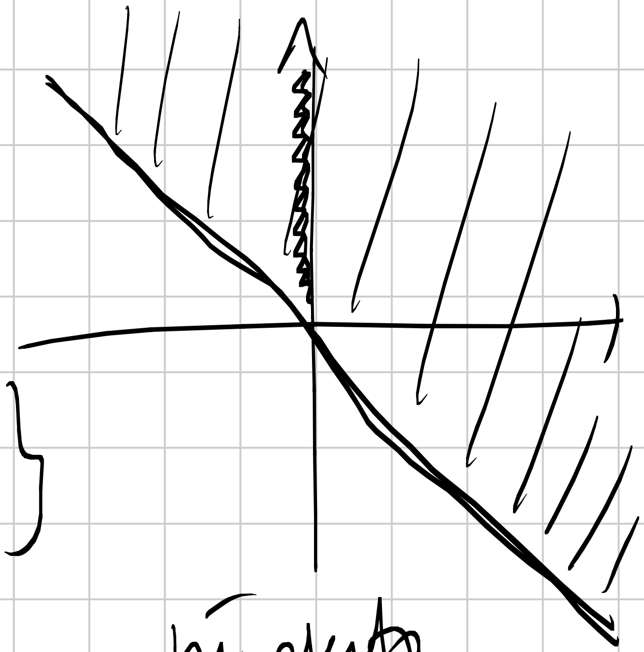


chiuso e illimitato

es.

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x}$$

$$A = \{ \underbrace{x+y \geq 0}_{\text{chiuso}} , \underbrace{x \neq 0}_{\text{aperto}} \}$$



né aperto
né chiuso
illimitato.

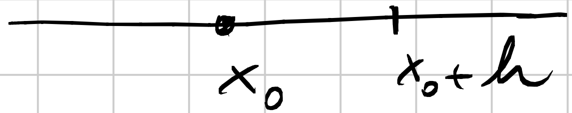
es.

- $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$
- $f(x,y) = \log\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

trovare, disegnare e dire se sono aperti, chiusi, né aperti, né chiusi

• $$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\log\left(2-(x^2+y^2)\right)}$$

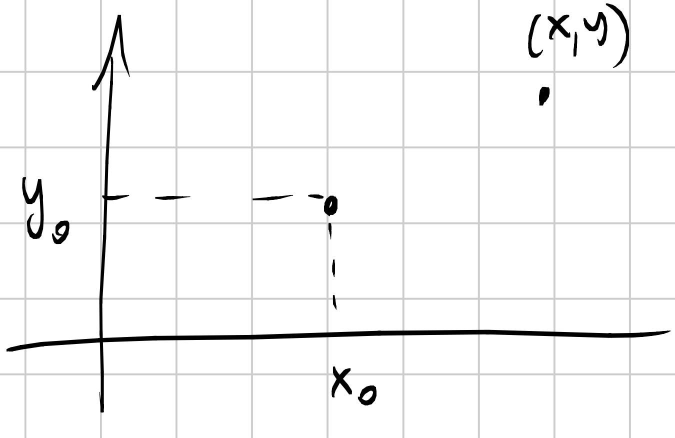
Derivate parziali



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

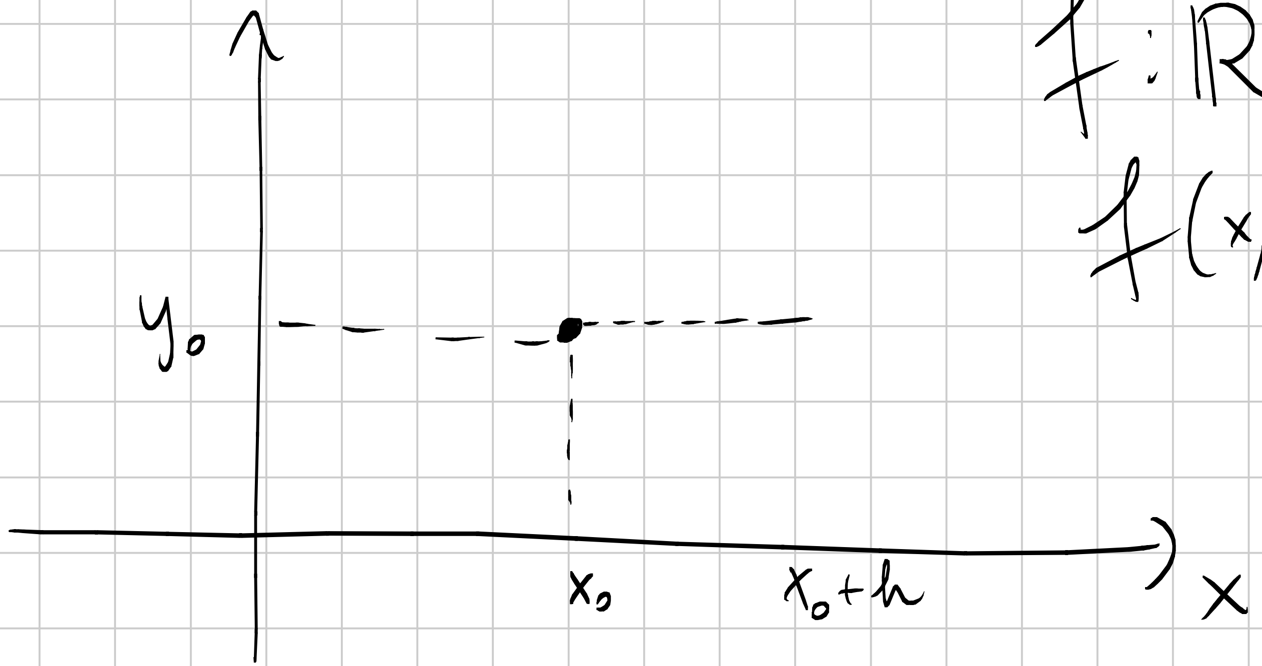
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(x,y)



$(x_0, y_0) \to (x,y)$

incremento.

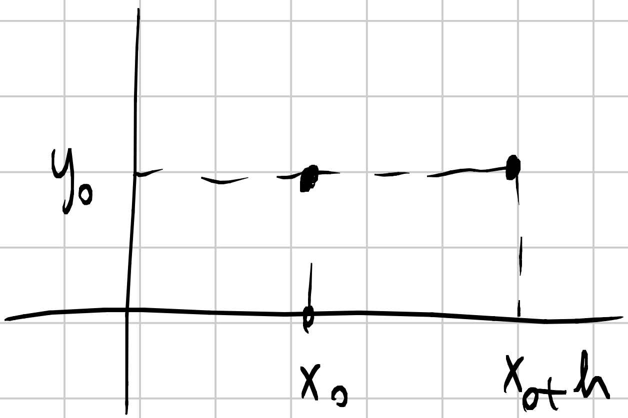


$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y)$

$f(x, y_0)$ funzione di una variabile (la x)

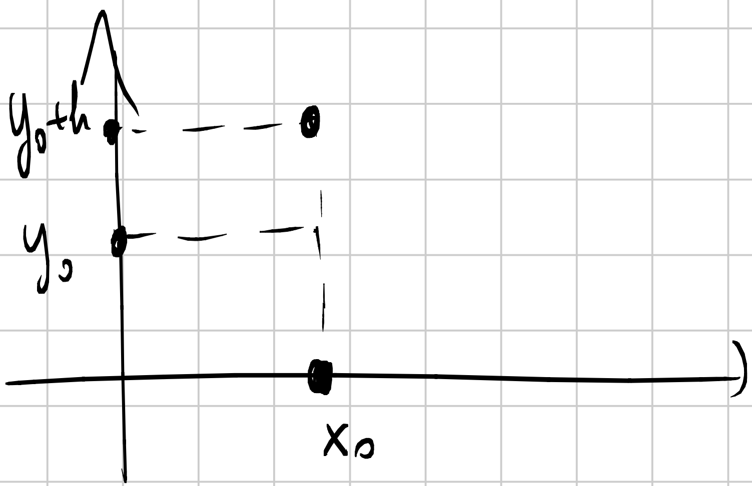
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$



derivata parziale di f rispetto a x in (x_0, y_0)

$$f(x_0, y)$$

faccio l'incremento nella variabile y



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

derivata parziale di f rispetto a y in (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$\left(f_x(x_0, y_0), \ f_y(x_0, y_0) \right) = \nabla f(x_0, y_0)$$

= gradiente di f in (x_0, y_0)

es. $f(x,y) = \underbrace{x^5 y^2 + 5}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 5x^4 \cdot y^2 \Big|_{(1,2)} = 5 \cdot 1 \cdot 4 = 20$$

$$f(x,y) = x^5 y^2 + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^5 \, 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

$$f_x(1,2) = 20 \qquad f_y(1,2) = 4$$

$$\nabla f(1,2) = (f_x(1,2), f_y(1,2)) = (20,4)$$

es.

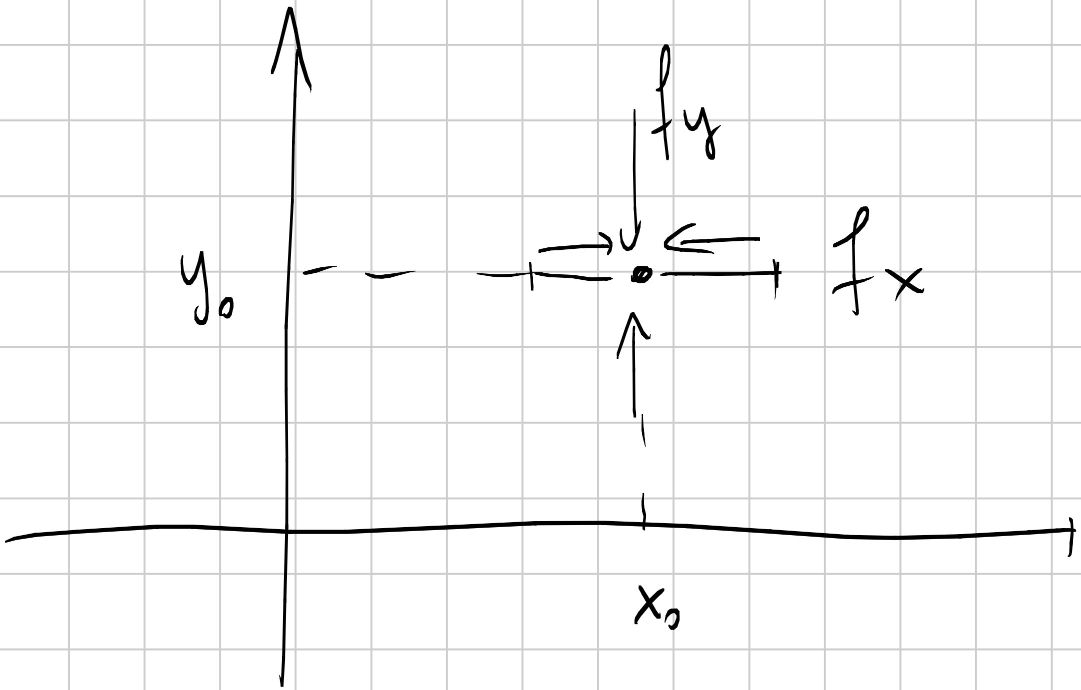
$$f(x,y) = e^{x/y}$$

$$f_x(x,y) = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_y(x,y) = e^{x/y} \cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$f_x(0,1) = e^0\, 1 = 1$$

$$f_y(0,1) = e^0 \cdot 0(-1) = 0$$



$f_x(x_0, y_0)$

Def f è **derivabile** in (x_0, y_0) che appartiene al dominio se esistono le sue derivate parziali in (x_0, y_0).

$$\left(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0)\right)$$

f di una variabile

f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f è continua in x_0

f di due variabili

f derivabile in (x_0, y_0) $\not\Rightarrow$ f è continua in (x_0, y_0)

una funzione può essere derivabile in (x_0, y_0)
ma non essere continua in (x_0, y_0)

ex. $f(x,y) = x\sqrt{y}$

$f_x(0,0)$

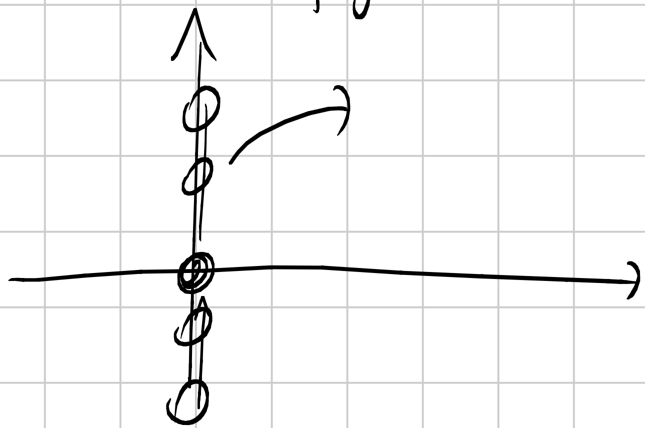
$f_y(0,0)$

$f_x(x,y) = \sqrt{y}$

$f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = x\,\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ $\Rightarrow f_y(0,0) = ?$

$f_y(0,0)$



f quanto vale sull'asse delle ordinate

$$f(x,y) = \underset{=0}{\overset{\Downarrow}{x}} \sqrt{y} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

$$\frac{0}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$f(x,y,z)$$

$$f_x$$

$$f_y$$

$$f_z$$

$$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xz) + \log(yx) + e^{zy}$$

$$f_x(x,y,z) = \cos(xz) \cdot z + \frac{1}{yx} \cdot y + 0$$

$$f_y(x,y,z) = 0 + \frac{1}{yx} \cdot x + e^{zy} z$$

$$f_z(x,y,z) = \cos(xz) \cdot x + 0 + e^{zy} \cdot y$$

$$\underline{\qquad\qquad} \cdot \underline{\qquad\qquad}$$

Esercizi di ricapitolazione

$$\sum \frac{\alpha^n \cos(n\pi)}{n(\pi^n + 3)}, \qquad \alpha > 0$$

- conv. assolut.
- conv. sempl.

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\sum (-1)^n \frac{\alpha^n}{n(\pi^n+3)}$$

conv. assoluta

$$|a_n| = \frac{\alpha^n}{n(\pi^n+3)} \sim \frac{\alpha^n}{n\,\pi^n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \qquad \sum \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$$

quando converge?

criterio radice $\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n} = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \longrightarrow \frac{\alpha}{\pi}$

$\frac{\alpha}{\pi} < 1$ la serie converge

$\Rightarrow$ la nostra serie conv. assolutamente

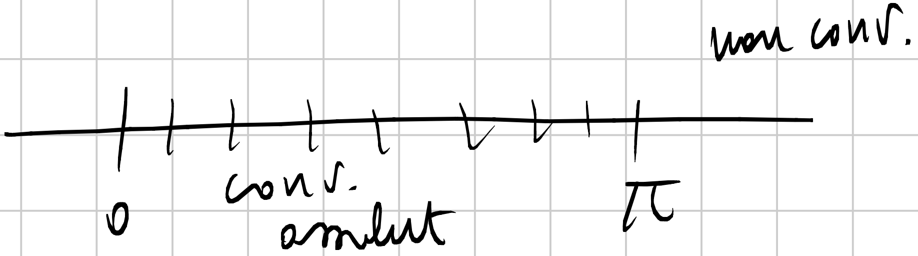
$\alpha < \pi$

$\frac{\alpha}{\pi} > 1$ la serie non converge $\Rightarrow$ la nostra serie non conv. assolutamente

$$\sum (-1)^n \frac{\alpha^n}{n(\pi^n+3)}$$

se $\alpha > \pi$

$a_n \not\to 0$



la serie non converge neanche semplicemente (perché non è soddisfatta la condizione necessaria di conv. della serie).

$$\alpha = \pi \qquad \sum (-1)^n \frac{\alpha^n}{n(\pi^n+3)}$$

$$\sum (-1)^n \frac{\pi^n}{n(\pi^n+3)}$$

conv. assolut. ?

$$|a_n| = \frac{\pi^n}{n\underbrace{(\pi^n+3)}_{\sim 1}} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\sum |a_n|$ diverge

$$\sum (-1)^n \underbrace{\frac{\pi^n}{n(\pi^n+3)}}_{a_n}$$ non conv. assolutamente

conv. <u>semplice</u> : criterio di Leibniz

- $a_n \to 0$ sì!
- a_n decrescente

$$a_n = \frac{\pi^n}{n(\pi^n + 3)}$$

è decrescente

$$f(x) = \frac{\pi^x}{x(\pi^x + 3)}$$

$$\frac{d}{dx}(\pi^x) = \pi^x \log \pi$$

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1 + \frac{3}{\pi^x}\right)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\left(1+\frac{3}{\pi^x}\right)^2}\left[1+\frac{3}{\pi^x} + x\left(-\frac{3}{(\pi^x)^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{\pi^x}\log\pi\right)\right] < 0$$

voglio che

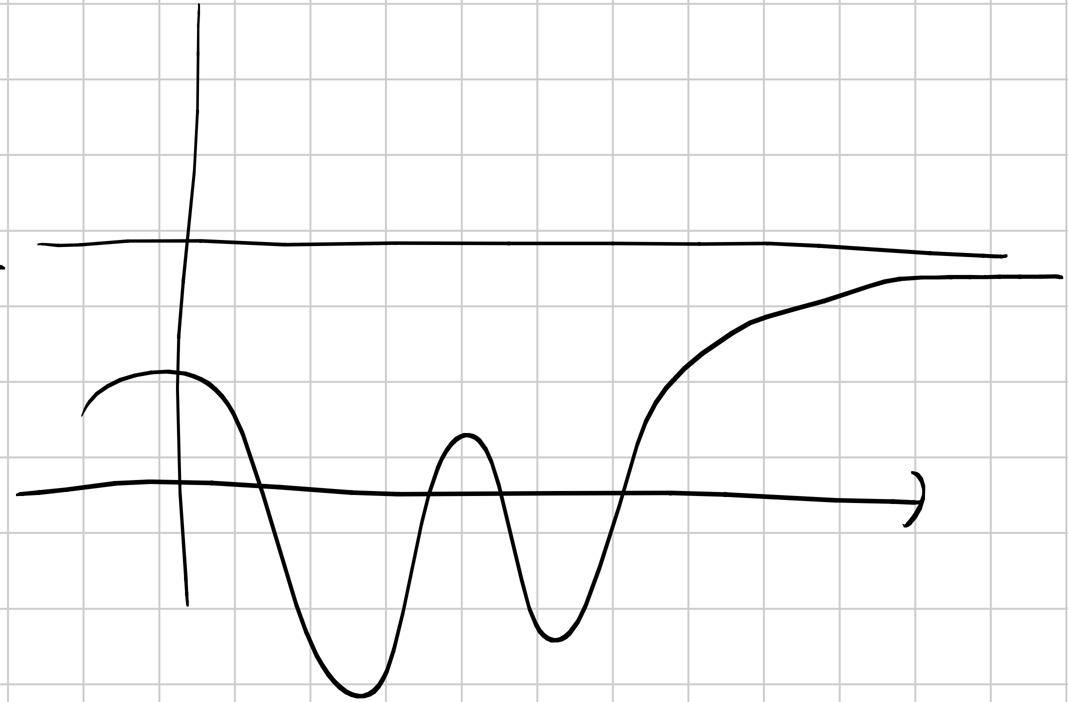
$$\left[1+\frac{3}{\pi^x} - \frac{3x}{\pi^x}\log\pi\right] > 0$$

per x abbastanza grande

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\ - \ - \ - \ \right] = 1$$

quindi per
x sufficientem. grande

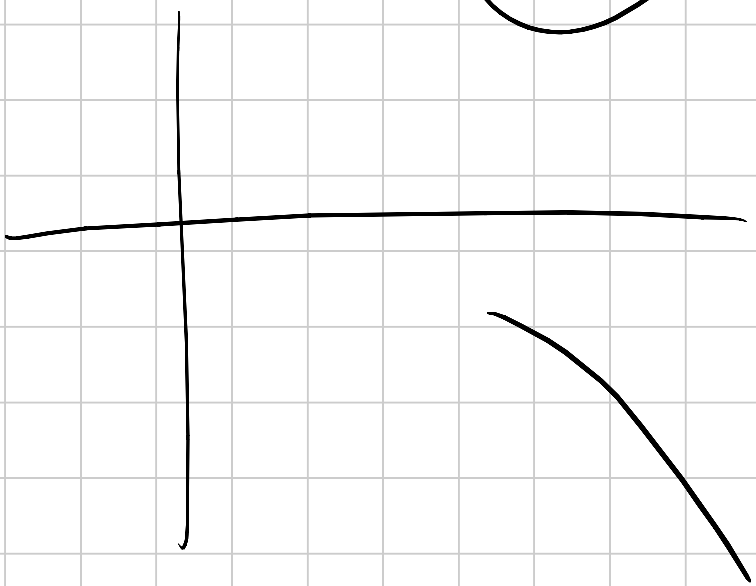
$[- - -] > 0$



$\Rightarrow f'(x) < 0$ per x suff. grande

$f(n) = \dfrac{\pi^4}{n(\pi^4+3)}$ è decrescente per n suff grande.

$$g(x) = \underbrace{-x^2 + \sqrt{x} + \log x}$$



$$= -x^2\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right)$$