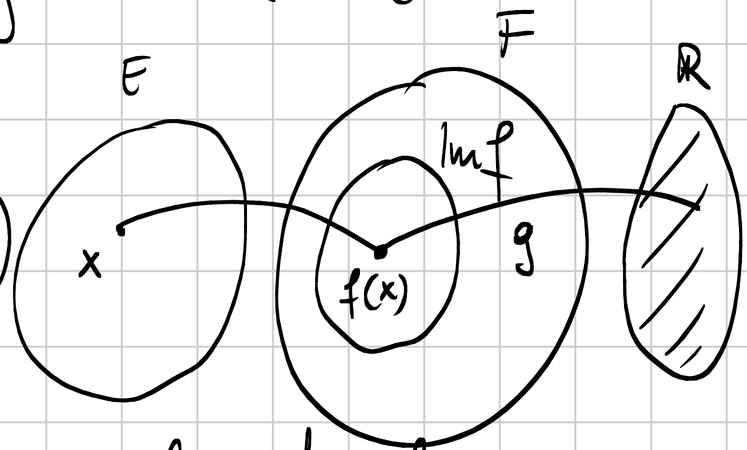
Lezione del 20 Ottobre

Funzioni composte

$f : E \to \mathbb{R}$, $g : F \to \mathbb{R}$ t.c.

$\mathrm{Im} f \subseteq F$

$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g(f(x))$



$h : E \to \mathbb{R}$ composta di f e g

$h = g \circ f$ è così definita

$h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

$f: E \to \mathbb{R}$
$g: F \to \mathbb{R}$
$\operatorname{Im} f \subseteq F$

$$g \circ f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) \qquad \operatorname{Img} \subseteq E$$

$$\underline{\text{oss.}} \quad f \circ g \neq g \circ f$$

$$\underline{\text{oss}} \quad (f \circ g) \circ z = f \circ (g \circ z)$$

$\underline{\text{Es.}}$ $f(x) = x^2 + 1$ $\qquad \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Dom} g$

$g(x) = \sqrt{x}$

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(1 + x^2\right) = \sqrt{1 + x^2}$$

$\mathrm{Im} f = [1, +\infty)$ $\qquad$ $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{Dom}\, g$

$\mathrm{Dom}\, g = [0, +\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 1 + x$$

es. $f(x) = -x^2 \leq 0$

$g(x) = \sqrt[4]{x}$ $\qquad$ $\mathrm{dom}\, g = [0, +\infty)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x^2) \text{ no!}$$

$\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{dom}\, g$ $\qquad$ non è definita

$(-\infty, 0]$ $\qquad$ $[0, +\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[4]{x}) = -\sqrt{x}$$

es. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ -x & x \leq 1 \end{cases}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 3 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

P.C. fare $g \circ f(x)$ $\boxed{\text{INTERRUZIONE}}$

Funzioni invertibili e funzioni inverse

$$f : D \longrightarrow f(D)$$

Def. f è invertibile in D se $\forall y \in f(D)$ $\exists$ uno e un solo $x \in D$ t.c. $f(x) = y$

cioè se f è iniettiva:

- $\forall\, x_1, x_2 \in D \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\forall\, x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\forall y \in f(D) \ \exists!\, x : f(x) = y$

i 3 p.ti sono equivalenti

es. $f(x) = x^2 \quad x \in R$ non è iniettiva
$f(x) = x^3 \quad x \in R$ è iniettiva

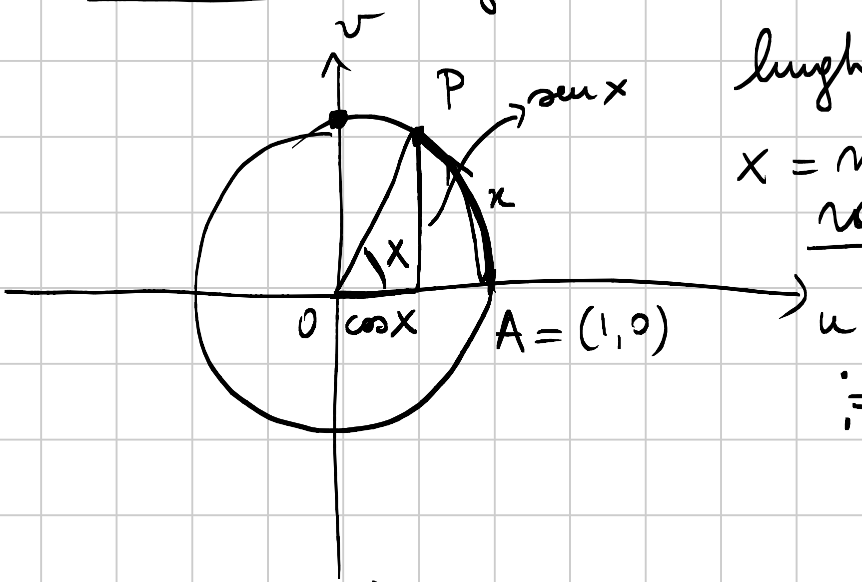
Teorema f strett. monotone in D è invertibile in D e la sua inversa è strett. monotona

Dim. alla lavagna.

Grafico di f^{-1} dal grafico di f
(alla lavagna)

3ª ora della lezione del 20/10

Funzioni trigonometriche



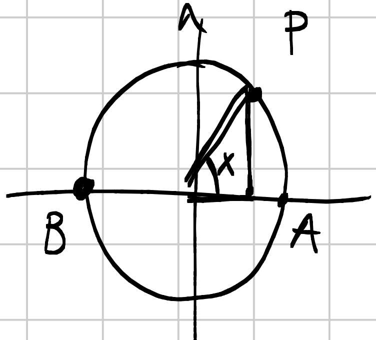
lunghezza dell'arco AP

x = misura in <u>radianti</u> dell'angolo $\widehat{AOP}$:= lunghezza dell'arco AP

$P = (-1, 0)$ $\quad x = \pi$

$P = (0, 1)$ $\quad x = \pi/2$

$x \in [0, 2\pi)$



$\cos x :=$ ascissa di P (coseno di x)

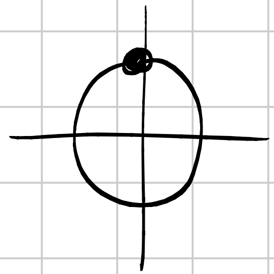
$\operatorname{sen} x :=$ ordinata di P (seno di x)

$P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$

$x = \pi \qquad P \equiv B = (-1, 0)$

$\cos(\pi) = -1$

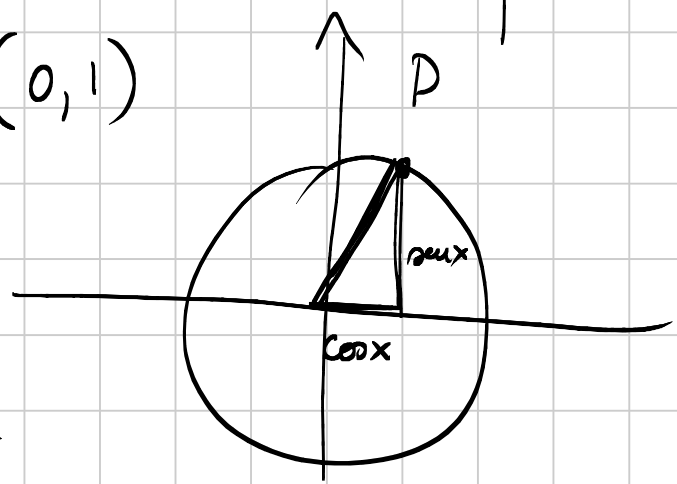
$\operatorname{sen}(\pi) = 0$



$x = \frac{\pi}{2} \qquad P = (0, 1)$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$

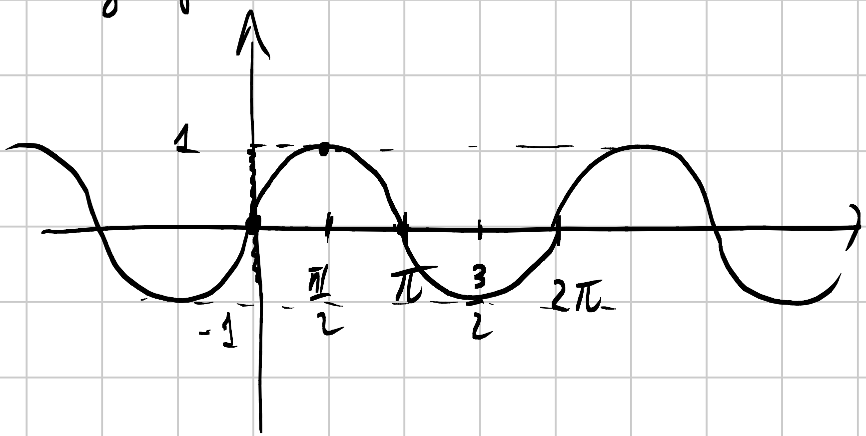
$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

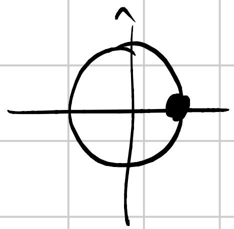


$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen} x, \ \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

grafico di sen x





- periodica di periodo 2π

$\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}\,x \Leftarrow$

- funzione dispari

$D = \mathbb{R}$

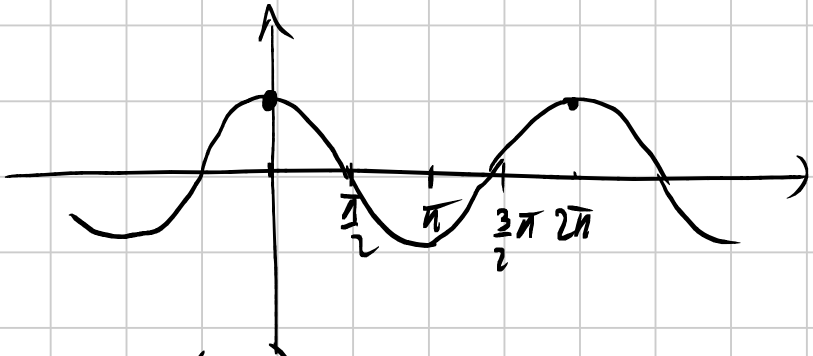
$\mathrm{Im}(\mathrm{sen}\,x) = [-1, 1]$

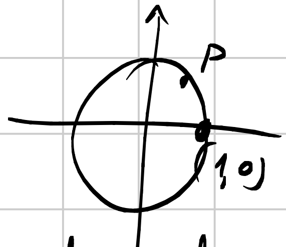
- funzione limitata

$-1 \leq \mathrm{sen}\,x \leq 1$

- f non è iniettiva e quindi non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

$y = \cos x \doteq$ ascissa del punto P





• periodica di periodo 2π.

$\cos(-x) = \cos x \leftarrow$ • è una funzione pari

$D = \mathbb{R}$

• $-1 \le f(x) \le 1$

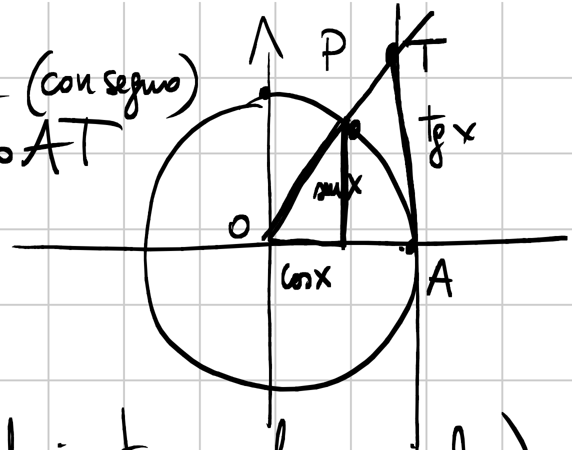
$\operatorname{Im}(\cos x) = [-1, 1]$

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{sen} x| \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1 \quad\quad |\cos x| \le 1$

$tg\, x :=$ lunghezza (con segno) del segmento AT



$x = \frac{\pi}{2}$ non è definita $tg\, x$

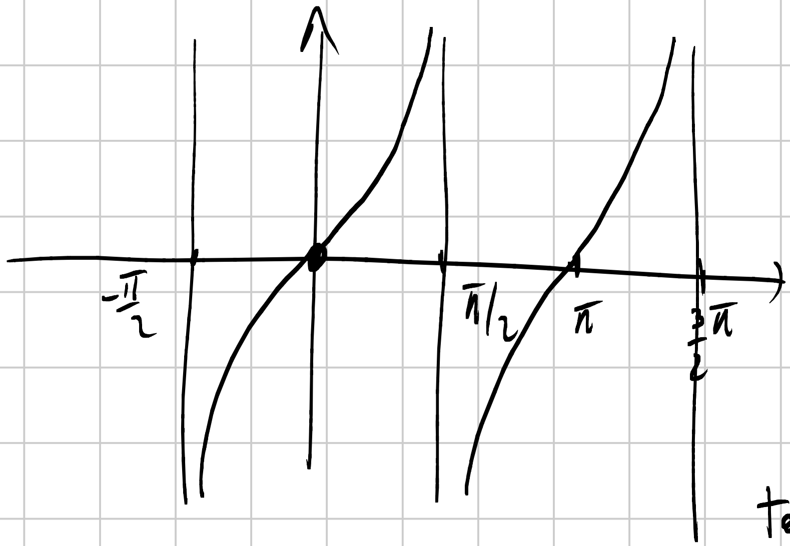
$$tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$ (dai triangoli simili)

se $\underbrace{cos\, x = 0}$ $tg\, x$ non è definita

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$



$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\operatorname{tg} 0 = 0$

- f periodica di periodo π
- f dispari $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ $\qquad \operatorname{Im}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$
- f è illimitata (sia sup. che inf.)

Def. $\quad \operatorname{cotg} x := \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

cotangente di x.

Esercizio $\quad \operatorname{sen} x + \cos x \geq 1$

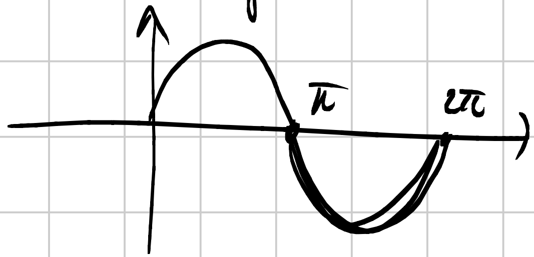
$$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{<0} \geq \underbrace{1 - \cos x}_{\geq 0}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$x \in [0, 2\pi)$

1) se $\operatorname{sen} x < 0$ non è mai verificata

se $x \in (\pi, 2\pi)$



2) se $\operatorname{sen} x \geq 0$

$$\operatorname{sen} x \geq 1 - \cos x$$

$$(\quad)^2 \geq (\quad)^2$$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\operatorname{sen}^2 x \geq 1 + \cos^2 x - 2\cos x$$

$$\cancel{1} - \cos^2 x \geq \cancel{1} + \cos^2 x - 2\cos x$$

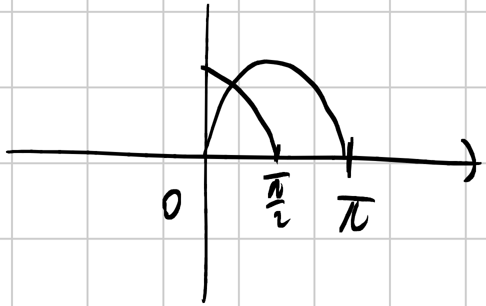
$$2\cos^2 x - 2\cos x \le 0$$

$$\cancel{2}\cos x \cdot \underbrace{(\cos x - 1)}_{\le 0} \le 0$$

$\cos x \le 1$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \operatorname{sen} x \geq 0 \end{cases}$$



$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. fin

$$x \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

<u>Domanda</u>. Trovare dominio, segno, eventuale periodicità e simmetria

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$