20 Gennaio

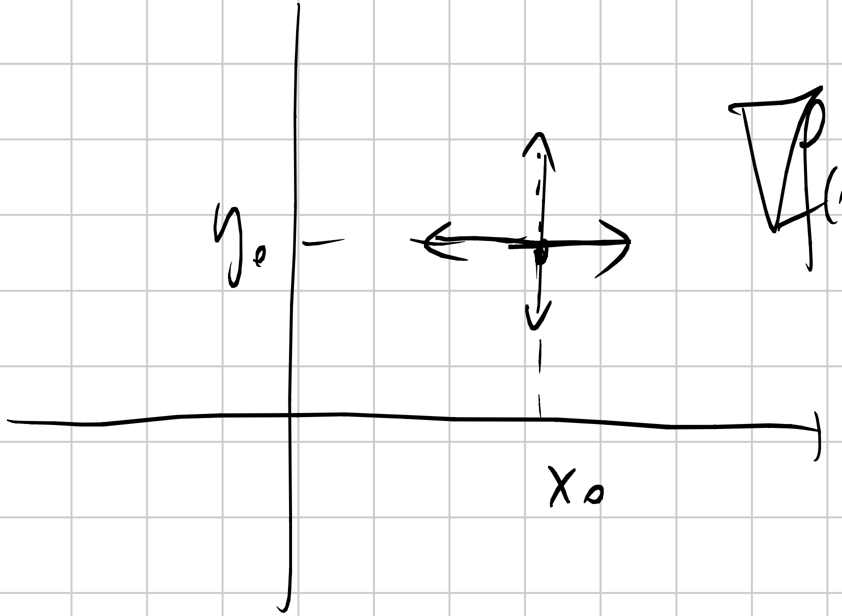
$f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

f derivabile in (x_0, y_0) se $\exists\ f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$

f derivabile in (x_0, y_0) $\not\Rightarrow$ f continua in (x_0, y_0)



$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \right)$$

Derivate parziali per funzioni di n variabili

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$f_{x_i}(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots x_i + h, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots x_n)}{h}$$

$$\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$$

---

derivate successive

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y)$$

$$f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy}$$

$$f_y(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} := D^2 f$$

matrice
Hessiana
2×2

<u>es.</u> $f(x,y) = e^{xy^2}$

$$f_x(x,y) = e^{xy^2} \cdot y^2$$

$$f_y(x,y) = e^{xy^2} \cdot 2xy$$

$$f_{xx}(x,y) = \left(e^{xy^2} \cdot y^2\right)_x = y^2 e^{xy^2} \cdot y^2$$

$$f_{xy}(x,y) = \left(e^{xy^2} y^2\right)_y = e^{xy^2} \cdot 2xy \cdot y^2 +$$

$$+ e^{xy^2} \cdot 2y$$

$$f_{yx}(x,y) = \left(e^{xy^2} \cdot 2xy\right)_x =$$

$$= 2y\left(e^{xy^2} \cdot y^2 x + e^{xy^2} \cdot\right)$$

uguali!

$$f_{yy}(x,y) = \left(e^{xy^2} 2xy \right)_y =$$

$$= 2x \left(e^{xy^2} \cdot 2xy \cdot y + e^{xy^2} \right)$$

Calcolare le derivate seconde in $(1,0)$

$$D^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{yx}(1,0) & f_{yy}(1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema di Schwarz

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$ derivabile due volte in A. Se $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$ sono continue in A

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

Funzioni differenziabili

f di <u>una</u> variabile $\quad f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$

f è <u>derivabile</u> in x_0

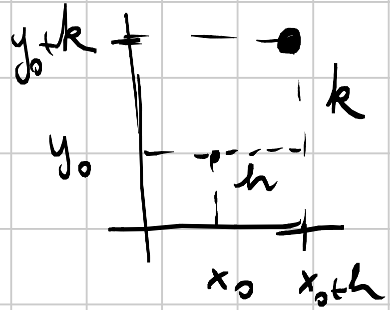
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \underset{h \to 0}{o(h)}$$

Def. $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$,

f è differenziabile in (x_0, y_0) se



1) esistono $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$

2) $$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0)\,k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

$$(h, k) \to (0, 0)$$

$x_0 + h = x$

$y_0 + k = y$

riscrivo la 2)

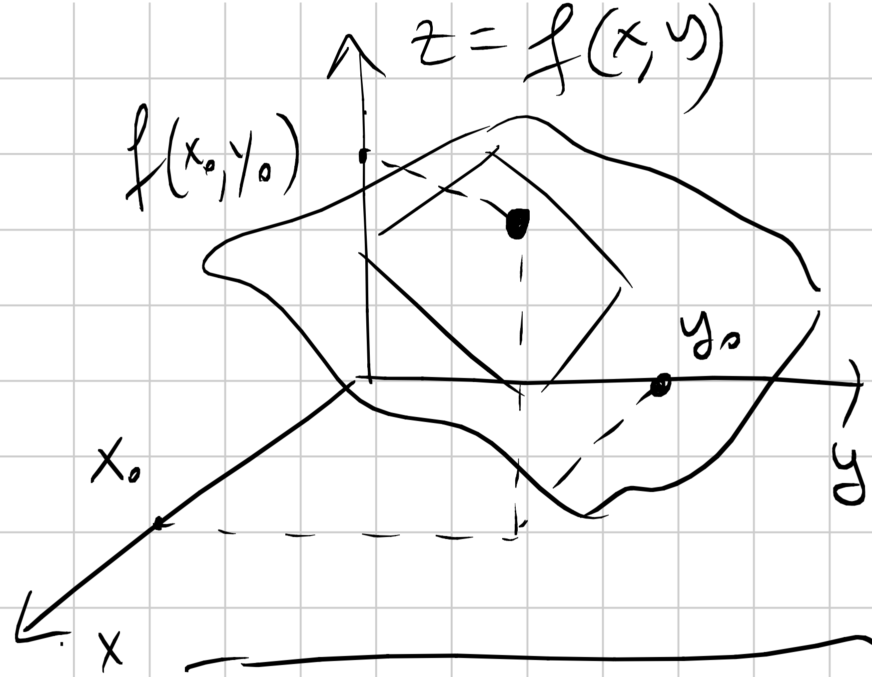
$h = x - x_0$

$k = y - y_0$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \qquad \begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}$$

$$f(x,y) = \underbrace{Ax + By}_{\text{piano tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0,\, y_0).} + o(\cdot\ \cdot)$$

Eq. <u>piano tangente al grafico</u> di $f(x,y)$ nel p.to $(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0))$.



$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

es. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) \qquad D = \mathbb{R}^2$

trovare il piano tangente al grafico di f

se $x_0 = 1 \qquad y_0 = \pi$

$$f(1,\pi) = \operatorname{sen}\pi = 0 = f(x_0, y_0)$$

$$f_x(x,y) = \cos(xy)\cdot y \qquad f_x(1,\pi) = (\cos\pi)\,\pi$$

$$f_y(x,y) = \cos(xy)\,x \qquad f_y(1,\pi) = (\cos\pi)\,1$$

$$f_x(1,\pi) = -\pi$$

$$f_y(1,\pi) = -1$$

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = 0 + (-\pi)(x-1) + (-1)(y-\pi)$$

$$z = \pi - \pi x + \pi - y$$

$$\boxed{z = 2\pi - \pi x - y}$$

eq. piano tg. al grafico di f nel p.to $(1, \pi, 0)$ in $\mathbb{R}^3$

$$z = Ax + By + C$$

Come si fa a capire se una funzione è differenziabile in un p.to.

Si usa la condizione sufficiente di differenziabilità.

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile in A.

Se $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ sono <u>continue</u> in (x_0, y_0) $\Rightarrow$ f è differenziabile in (x_0, y_0).

<u>es.</u> (precedente) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

$f_x(x,y) = \cos(xy) \cdot y$

$f_y(x,y) = \cos(xy) \cdot x$

sono continue in $\mathbb{R}^2$ e quindi f è differenziabile in ogni p.to $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Oss. Se f è differenziabile in (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ f è continua in (x_0, y_0).

Dim. f differenziabile significa

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$$(x,y) \to (x_0,y_0)$$

devo dim. che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

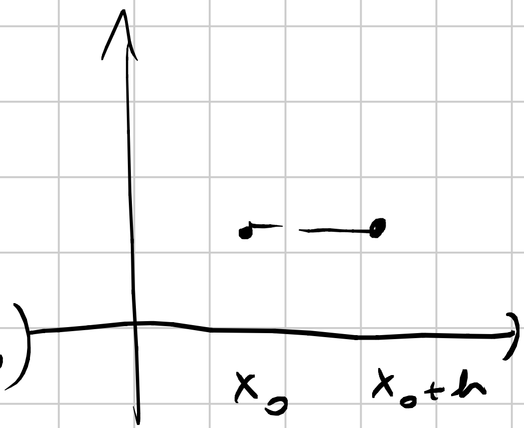
e questo segue dal fatto che

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \to 0 \qquad x \to x_0$$
$$f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \to 0 \qquad y \to y_0$$

#

Derivate direzionali

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$



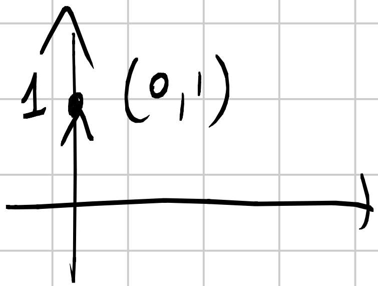
derivata nella "direzione" dell'asse x

$(1,0)$

versore è lungo 1

cioè il suo modulo è 1

$f_y(x_0, y_0)$



$(0, 1)$

$(v_1, v_2) = \underline{v}$

$|\underline{v}| = 1$ versore

$$= f_v(x_0, y_0) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v_1,\ y_0 + h v_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$

derivata di f nella direzione $\underline{v}$ in (x_0, y_0)

(derivata direzionale).

caso particolare $\quad v = (1,0) \quad f_v = f_x$

$\qquad v = (0,1) \quad f_v = f_y$

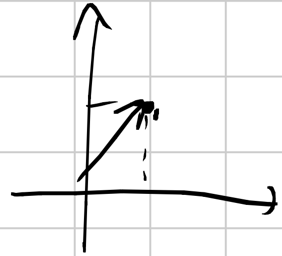
Come si fanno a calcolare?

Formula del gradiente

f differenziabile in (x_0, y_0), $\quad \underline{v} = (v_1, v_2)$

$$f_v(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot v_1 + f_y(x_0,y_0)\cdot v_2$$

$$\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_$$



es. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

calcolare $f_v(1,1)$ dove $\underline{v} = \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{v_1}, \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{v_2}\right)$

$$f_v(1,1) = f_x(1,1)\,\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(1,1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f_x(x,y) = \cos(xy)\cdot y$ $\qquad f_x(1,1) = \cos 1$

$f_y(x,y) = \cos(xy)\cdot x$ $\qquad f_y(1,1) = \cos 1$

$$f_v(1,1) = \cos 1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cos 1$$

Es. di ricapitolazione f in più variabili

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2-1}{3x-y}\right)$$

D = dominio?

$$\frac{x^2-1}{3x-y} > 0$$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ 3x-y>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-1<0 \\ 3x-y<0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

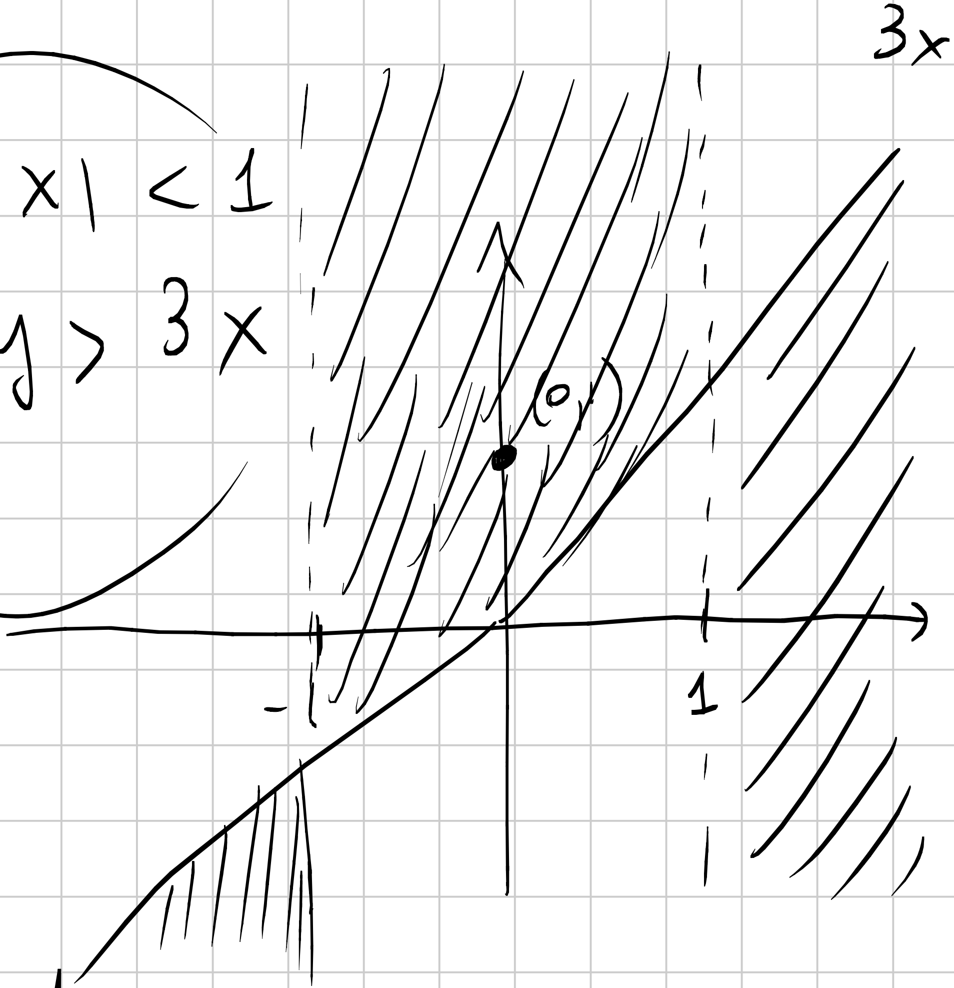
$$\begin{cases} |x| > 1 \\ y < 3x \end{cases}$$

aperto

$\Downarrow$

$$\begin{cases} |x| < 1 \\ y > 3x \end{cases}$$

aperto



D è unione di due aperti

$\Rightarrow$ D è insieme aperto.

- illimitato.

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2-1}{3x-y}\right) =$$
$$= \log(x^2-1) - \log(3x-y)$$

- Calcolare $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x - \frac{1}{3x-y} \cdot 3$$

$$f_y(x,y) = -\frac{1}{(3x-y)} \cdot (-1)$$

- dire se f è differenziabile in $(0,1)$: sì!
perché f_x e f_y sono continue in $(0,1)$.

- Trovare piano tangente al grafico di f nel p.to $(0, 1, f(0,1))$

$$z = \underbrace{f(0,1)}_{} + \underbrace{f_x(0,1)}_{}(x-0) + \underbrace{f_y(0,1)}_{}(y-1)$$

- $f(0,1) = \log\left(\frac{-1}{-1}\right) = 0$

- $f_x(0,1) = 3$

$f_y(0,1) = -1$

$$z = 0 + 3x + (-1)(y-1)$$

$$z = 3x - y + 1$$

- Calcolare $f_v(0,1)$ $\quad \underline{v} = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{v_1}, \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{v_2}\Big)$

$$f_v(0,1) = f_x(0,1)\cdot\frac{1}{2} + f_y(0,1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

-
-

$\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_$

es.

$$\sum (n!)^2 \log\left(1+\frac{1}{n^{\alpha n}}\right)$$

dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge.

$\alpha \leq 0$ $\qquad a_n \not\to 0 \qquad \Rightarrow$ diverge.

non converge

$\alpha > 0$ $\qquad a_n \sim \dfrac{(n!)^2}{n^{\alpha n}}$

$$\sum \underbrace{\frac{(n!)^2}{n^{\alpha n}}}_{} \; b_n$$

criterio del rapporto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^{\alpha(n+1)}} \cdot \frac{n^{\alpha n}}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(n!)^2}\,(n+1)^2}{(n+1)^{\alpha n}\cdot (n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{n^{\alpha n}}{\cancel{(n!)^2}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\alpha n} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\alpha}} \to \frac{1}{e^{\alpha}}$$

$\alpha - 2 > 0$ $\quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to 0 < 1$ $\quad \alpha > 2$

le serie converge

$\alpha - 2 < 0$ $\quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to +\infty$ $\quad \alpha < 2$

le serie diverge

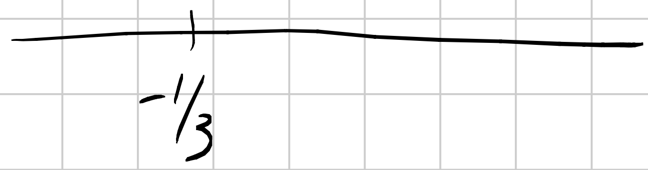
$\alpha = 2$ $\quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to \dfrac{1}{e^2} < 1$ la serie converge

$\alpha \geqslant 2$

es. $$\sum \frac{(-1)^n \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)}{(1+n)^{3\alpha+1}}$$

1) det. $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \to 0$

$$\frac{(-1)^n \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)}{(1+n)^{3\alpha+1}} \overset{?}{\longrightarrow} 0$$



$3\alpha+1>0 \qquad \alpha > -1/3$

2) det. α t.c. la serie conv. assolut.

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1+\sin\frac{1}{n}}{(1+n)^{3\alpha+1}}$$

$$a_n \sim \frac{1}{n^{3\alpha+1}}$$

$$\sum \frac{1}{n^{3\alpha+1}} \qquad 3\alpha+1>1 \qquad \alpha>0$$

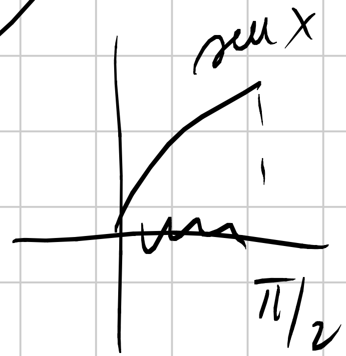
non conv. $\qquad$ conv. assolut.

$-1/3 \qquad 0$

3) det α la serie conv.

Leibniz

$$\sum (-1)^n \underbrace{\left(1+ \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) \frac{1}{(1+n)^{3\alpha+1}}}_{a_n}$$



- $a_n \to 0$ si!
- a_n decrescente

$\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ decrescente

$\Rightarrow$ è decrescente

$\frac{1}{(1+n)^{3\alpha+1}}$ decrescente

$\forall\ \alpha \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right]$

si applica Leibniz
$\Rightarrow$ la serie
conv. semplic.

$\operatorname{sen} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$