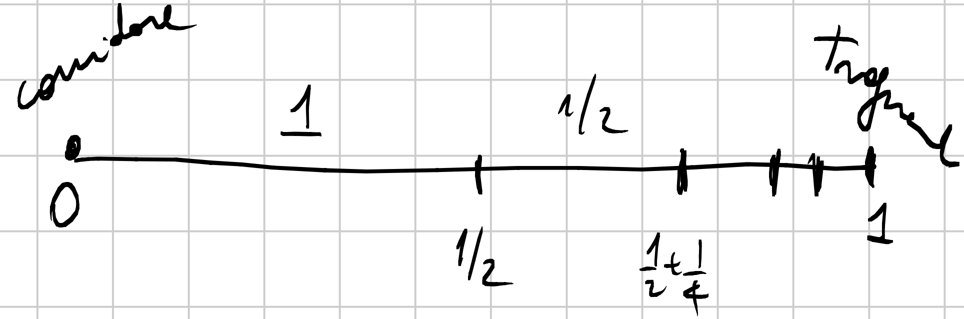
Lezione del 21 Dicembre

Serie numeriche

$\{a_k\}$ successione di numeri reali
$k=0,1,\dots$

dare significato $a_0+a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$

Paradosso di Zenone:



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^n} + \dots$$

$= \text{vedremo} = 2$

<u>Def.</u> $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, successione di numeri reali

Costruisco un'altra successione

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

successione delle somme parziali o delle somme ridotte

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{S_n}_{} =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

a_k = termini della serie

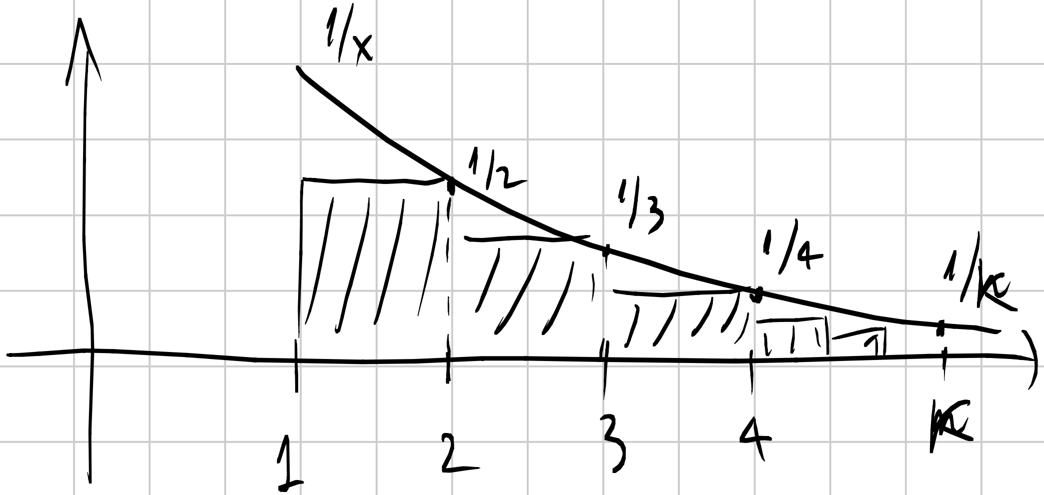
S_n = successione delle somme parziali

se $\lim_{n\to+\infty} S_n$

- $\exists$ finito $\Rightarrow$ la serie è <u>convergente</u>
- $\exists\ \pm\infty \Rightarrow$ la serie è <u>divergente</u>
- $\nexists \Rightarrow$ <u>indeterminata</u>

Determinare il carattere di una serie $\Rightarrow$ dire se è conv., div., indet.

<u>OSS.</u> analogia con $\int$ generalizzati su intervalli illimitati



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} + \dots = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

<u>oss.</u> $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \doteq \lim_{n} S_n$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k} - a_0 - a_1 - a_2$$

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

$a_3 + a_4 + a_5 + \dots$

$\Rightarrow$ Il carattere delle due serie è lo stesso.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

es. $a_k = \frac{1}{k}$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\vdots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ converge } \iff \lim_{n} S_n \nearrow$$

1) si riesce a calcolare esplicitamente S_n

2) se non si riesce $\Rightarrow$ criteri di convergenza

Alcuni casi in cui si calcola esplicitamente S_n.

$\leadsto$ 1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k$

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k = \lim_{n} S_n = \lim_{n} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.

es. 2

$$\sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^k$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{n} S_n \nexists$$

$$S_3 = -1$$

$$S_4 = (-1) + 1 = 0$$

$$S_5 = S_4 + (-1)^5 = 0 - 1$$

$$S_6 = S_5 + (-1)^6 = -1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^k$$ è irregolare

es. 3

$$a_k = q^k \qquad q \in \mathbb{R}$$

$q =$ ragione della successione.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

serie geometrica di ragione q

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\|$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \begin{cases} \text{convergente a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ \text{divergente } (a+\infty) & \text{se } q \geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$q=1 \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \qquad S_n = \underbrace{1}_{k=0}+\underbrace{1}_{k=1}+\cdots+\underbrace{1}_{k=n} = n+1 \to +\infty$

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} 5^k$ divergente $\left(\sum_{k=37}^{+\infty} 5^k\right)$ divergente!

$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$ convergente $\left(2 = \frac{1}{1-q} \quad q=\frac{1}{2}\right)$

$$\downarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$ convergente $q = -\frac{1}{3}$ $\quad \left|-\frac{1}{3}\right| < 1$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-8)^k$$ irregolare $q = -8 \leq -1$

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Prop. se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente $\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

(e quindi se $\lim_{k} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ non è convergente)

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} k \qquad a_k = k \qquad \lim_{k\to+\infty} k = +\infty$

$\sum k$ non è convergente!

<u>Dim.</u> <u>Hp.</u> $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge

$\lim_{n} S_n = S$ ∃ finito

$$a_n = \underset{\underset{S}{\downarrow}}{S_n} - \underset{\underset{S}{\downarrow}}{S_{n-1}} \longrightarrow 0$$

#

<u>oss.</u> analogo a dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ deve essere zero perché esista $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

<u>oss.</u> $a_k \to 0$ è solo una condizione necessaria ma non è sufficiente.

può essere che $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ ma $\sum a_k$ **non converge**

<u>es.</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\qquad a_k = \frac{1}{k} \to 0$

ma faremo vedere che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è divergente

<u>es.</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-3)^k$ $\qquad a_k = (-3)^k \; \overset{?}{\cancel{\xrightarrow[k \to +\infty]{}}} \; 0$

non è convergente

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 3^k$ $\qquad a_k \to +\infty$ $\Rightarrow$ non è convergente.

$\qquad\qquad \cancel{\to} \; 0$

Ricerca di primitive di alcune funzioni irrazionali

$$\sqrt{a^2 - x^2}\ , \quad \sqrt{a^2 + x^2}\ , \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

es.

$$\int \sqrt{3 - x^2}\, dx =$$

$\sqrt{1-x^2}$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$$= \int \sqrt{3\left(1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}\, dx =$$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} \, dx$$

$\frac{x}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen} t$

$x = \sqrt{3} \operatorname{sen} t$

$dx = \sqrt{3} \cos t \, dt$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \; \sqrt{3} \cos t \, dt$$

$$= 3 \int |\cos t| \cos t \, dt$$

$$\int \cos^2 t \, dt \quad = \text{per parti} \ldots\ldots$$

$\frac{x}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen} t$

stesso es.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} \, dx \quad = 3 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t \, dt$$

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos t > 0 \implies |\cos t| = \cos t$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \ldots$$

In generale $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = |a| \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$

$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} t$

$x = a \operatorname{sen} t$

$dx = a \cos t \, dt$

es.

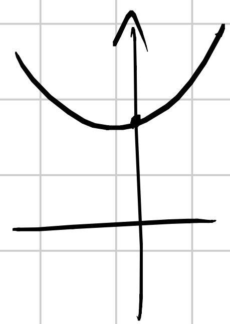
$$\int \sqrt{5+x^2}\,dx = \qquad\qquad 1+\operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$$

$$= \sqrt{5}\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx \qquad\qquad \frac{x}{\sqrt{5}} = \operatorname{senh} t$$

$$x = \operatorname{senh} t\,\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{5}\int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\;\sqrt{5}\cosh t\,dt \qquad\qquad dx = \cosh t \cdot \sqrt{5}\,dt$$

$$= 5\int \cosh t\,\cosh t\,dt$$



per parti....

es.

$$\int \sqrt{x^2 - 7}\, dx$$

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

$$\cosh^2 t - 1 = \operatorname{senh}^2 t$$

$$= \sqrt{7} \int \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{x}{\sqrt{7}} = \cosh t$$

$$x = \sqrt{7}\cosh t$$

$$dx = \sqrt{7}\operatorname{senh} t\, dt$$

$$= \sqrt{7} \int \left(\sqrt{\cosh^2 t - 1}\right) \sqrt{7} \operatorname{senh} t\, dt$$

$$= 7 \int \sqrt{\operatorname{senh}^2 t}\, \operatorname{senh} t\, dt = 7 \int |\operatorname{senh} t| \operatorname{senh} t\, dt$$

Es.
$$\int \sqrt{x^2 + 6x}\, dx =$$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 =$$
$$= (x+3)^2 - 9$$

$$= \int \sqrt{(x+3)^2 - 9}\, dx =$$

$$= 3 \int \sqrt{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{x+3}{3} = \cosh t$$

$$\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$$

$$x+3 = 3\cosh t$$
$$x = 3\cosh t - 3$$

$$= 3 \int \sqrt{\operatorname{senh}^2 t} \; 3 \operatorname{senh} t \, dt \qquad dx = 3 \operatorname{senh} t \, dt$$

$$= 9 \int |\operatorname{senh} t| \operatorname{senh} t$$

---

es.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x\,(2\sqrt[3]{x} + 3)}\, dx \qquad \sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad \sqrt[3]{x} = t^{2/3}$$

$$x = t^6 \qquad dx = 6t^5\, dt$$

$$\sqrt{x} = t^3$$

$$\sqrt[3]{x} = t^2$$

$$= \int \frac{t^3}{\cancel{t^6}(2t^2+3)} \cdot 6\,\cancel{t^5}\,dt =$$

$$= \frac{6}{2}\int \frac{2t^2}{2t^2+3}\,dt = 3\int \frac{2t^2+3-3}{2t^2+3}\,dt$$

$$= 3\left(\int\left(1 - \frac{3}{2t^2+3}\right)dt\right) = \text{finire}$$

es.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$\sqrt{x-1} = t$$

$$(x-1) = t^2$$

$$x = 1+t^2$$

$$dx = 2t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{(1+t^2)\cdot \cancel{t}}\,\cancel{2t}\,dt$$

in quale intervallo $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ è integrabile

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

$x > 1$

$x = 1 \quad , \quad x \to +\infty$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \,?$$

calcolare la primitiva e uso la def. di intg

criteri

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \,?$$

criteri (a caso con primitiva)

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$x \downarrow 1$

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$$

integrabile ($\alpha = 1/2 < 1$) in $(1,2)$

fare con $\lim_{\omega \to 1} \int_\omega^2 f(x)\,dx$ con funzione

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$$

$\left(\frac{3}{2} > 1\right)$

f è integrabile in $(2,+\infty)$

P.C. $\lim_{\omega \to +\infty} \int_2^\omega \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

h.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad \text{converge ?}$$

$$= \underbrace{\int_1^{2} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx}_{\text{converge}}$$

$\underline{\text{es}}$ $$\int_2^{+\infty} \frac{6\,x^{2\alpha}}{(x-1)^2\,(x^2+x^\alpha+1)}\,dx$$

1) dire per quali $\alpha > 0$ $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$, $x \to +\infty$

2) " " " $l'\int_2^{+\infty}$ converge.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6\,x^{2\alpha}}{(x-1)^2\,(x^2+x^\alpha+1)} =$$

$$f(x) \sim \frac{6\,x^{2\alpha}}{x^2\left(x^2 + x^\alpha\right)} =$$

$\boxed{\alpha > 2}$ $\sim$

$$\frac{6\,x^{2\alpha}}{x^2 \cdot x^\alpha} = \frac{6}{x^{2+\alpha-2\alpha}} = \frac{6}{x^{2-\alpha}} \xrightarrow{?} 0$$

no se $\alpha > 2$

$2 - \alpha > 0$

$\alpha < 2$

$f(x) \not\to 0$ se $\alpha > 2$

$\alpha < 2$ $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2-2\alpha}(x^2 + x^\alpha)} \sim \dfrac{1}{x^{2-2\alpha+2}}$

$4 - 2\alpha > 0$ $\quad = \dfrac{1}{x^{4-2\alpha}} \to 0$?

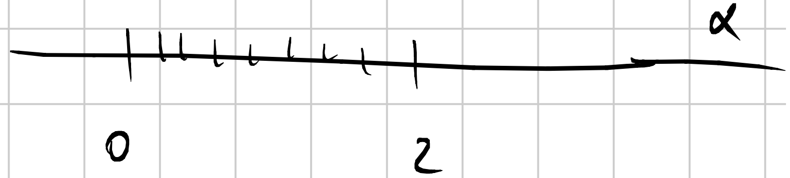
$4 > 2\alpha \quad \alpha < 2$

$\forall \alpha < 2 \quad f(x) \longrightarrow 0$

$\alpha = 2 \quad f(x) \sim \dfrac{1}{2x^{4-2\alpha}} \sim \dfrac{1}{2} \not\to 0$

$\alpha = 2$

Rispetto allo 1) $\forall\, 0 < \alpha < 2$



2) $\alpha > 2$ $\quad f(x) \to +\infty$

non è integrabile

$\alpha = 2$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{2}$ non è integrabile

$0 < \alpha < 2$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{4-2\alpha}} \qquad x \to +\infty$$

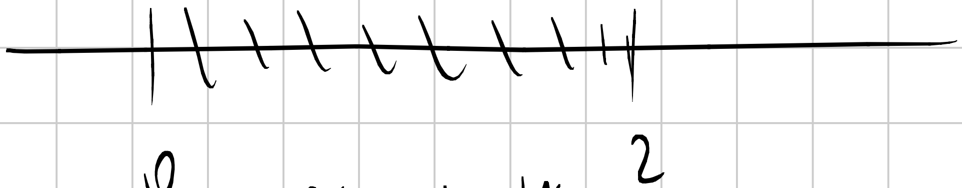
$\Downarrow$ è integrabile in $[2, +\infty)$

$$4 - 2\alpha > 1$$

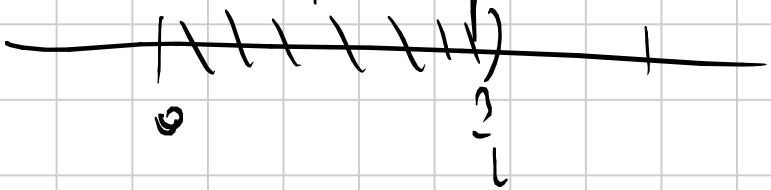
$$3 > 2\alpha \qquad \alpha < \frac{3}{2}$$

$\forall \quad 0 < \alpha < \frac{3}{2}$ $\quad f(x)$ è integrabile in $[2, +\infty)$

$f(x) \to 0$



$f(x)$ integrabile



es.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left(1+x^3\right)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}\underbrace{\left(\log^2 x + 2\sqrt{2}\log x + 2\right)}_{\left(\log x+\sqrt{2}\right)^2}}\,dx$$

1) dire per quali α converge

2) calcolarlo per $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left(1+x^3\right)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}\left(\log x+\sqrt{2}\right)^2}$$

$'' \neq 0$ in $[1, +\infty)$

$$f(x) \sim \frac{x^{3(1-\alpha)}}{x^{2-\alpha} \log^2 x} = \frac{1}{x^{2-\alpha-3+3\alpha} \log^2 x}$$

$$= \frac{1}{x^{2\alpha-1} \log^2 x}$$

è integrabile

$\Updownarrow$

$$2\alpha - 1 \geq 1$$

$$2\alpha \geq 2 \qquad \alpha \geq 1$$

(confronto con $\dfrac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}}$)

$f(x)$ è integrabile in $[1, +\infty) \iff \alpha \geq 1$

2) calcolarlo per $\alpha = 1$

$\cancel{\alpha = 1/2} \rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{x\left(\log x + \sqrt{2}\right)^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\left(\log x + \sqrt{2}\right)^2} dx$$

$$\log x = t$$

$$\int \frac{1}{x(\lg x+\sqrt{2})^2}\,dx = \int \frac{dt}{(t+\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{(t+\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{1}{(\lg x+\sqrt{2})} + K$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\lg x+\sqrt{2})^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left[-\frac{1}{(\lg\omega+\sqrt{2})}+\frac{1}{\lg 1+\sqrt{2}}\right]$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty}\Bigg[\underbrace{-\frac{1}{\lg\omega+\sqrt{2}}}_{\to 0}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$