24 Novembre

Def. M massimo (globale) per f in $[a,b]$ e x_0 p.to di massimo se $f(x_0) = M \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

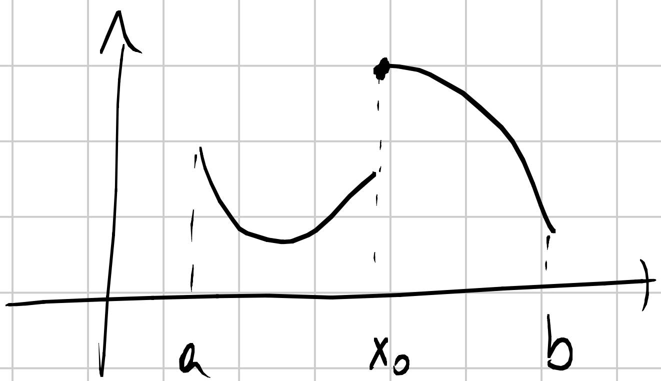
m minimo (globale) per f in $[a,b]$ e x_1 p.to di minimo se $f(x_1) = m \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

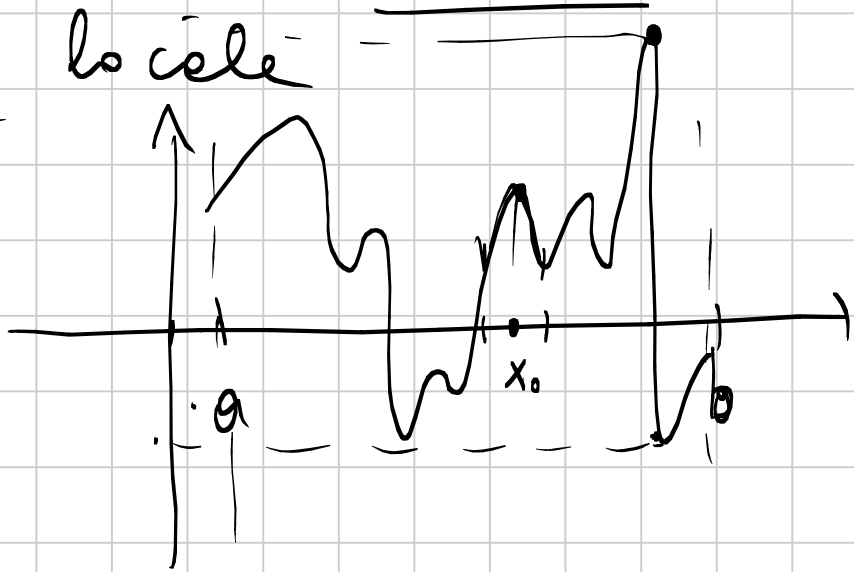
Def. M è un <u>massimo locale</u> per f e x_0 è il <u>punto</u> di massimo locale se esiste un intorno di x_0, $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.c.

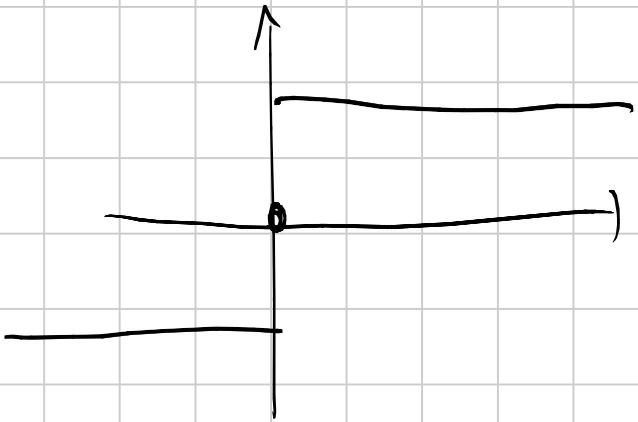
$$M = f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in U$$

e analogamente m e x_1 <u>minimo locale</u> e punto di <u>minimo</u> locale

n.2



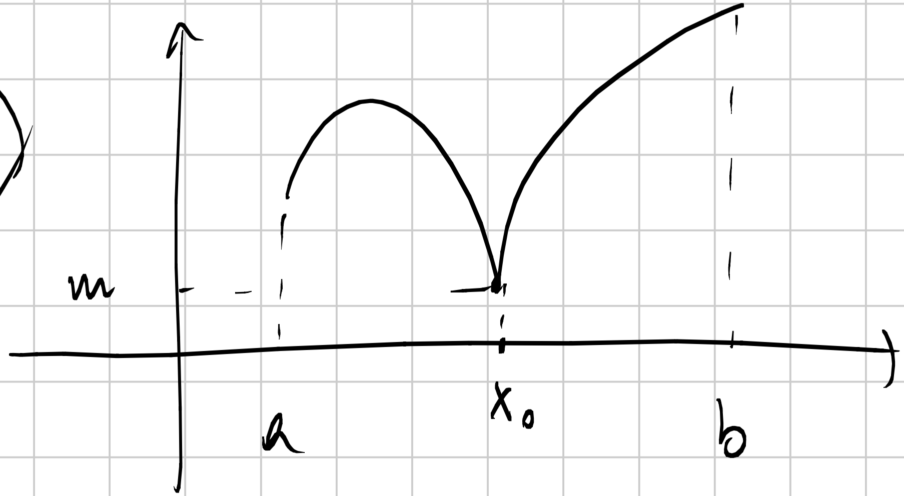




$x > 0$ p.ti di massimo $M = 1$

$x < 0$ p.ti di minimo $m = -1$

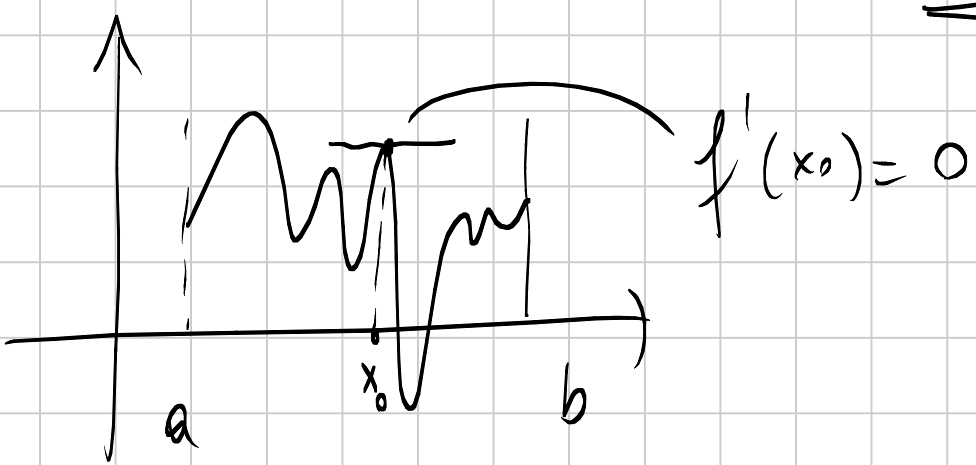
es 4.



i max e min locali e globali si chiamano <u>estremi</u> di f

Gli estremi possono essere in p.ti in cui la funzione <u>non</u> è continua (es 2) oppure in p.ti in cui f <u>non</u> è derivabile (es.4)

Ma se la f è derivabile in un p.to x_0 interno al dominio in cui c'è un estremo $\Rightarrow f'(x_0) = 0$



Teorema di Fermat

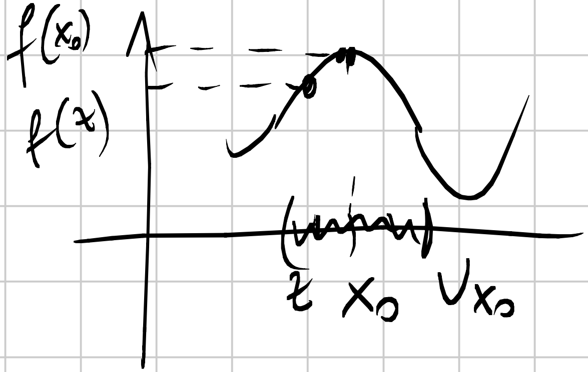
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $x_0 \in (a,b)$.

Se x_0 è un p.to di estremo locale allora

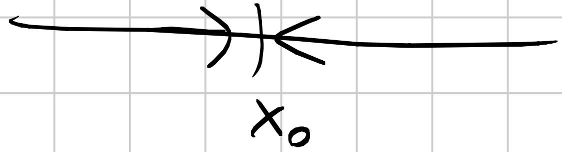
$$f'(x_0) = 0$$

Dim. supp. che x_0 sia p.to di max locale

$$\exists U_{x_0} : f(t) \le f(x_0) \quad \forall t \in U_{x_0}$$



$$\lim_{t \to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$



$t > x_0$

$$\frac{\overbrace{f(t) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{t - x_0}_{> 0}} \le 0$$

(teo. permanenza segno $g(t) \ge 0 \quad \lim_{t \to t_0} g(t) \ge 0$)

quindi $\lim_{t \to x_0^+} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \le 0$

$$t < x_0 \qquad \frac{\overbrace{f(t)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{t-x_0}_{<0}} \geq 0$$

quindi segue per la permanenza del segno

$$\lim_{t \to x_0^-} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} \geq 0$$

perché f è derivabile in x_0 $\exists \lim_{t \to x_0} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$

quindi $\underbrace{\lim_{t \to x_0^+} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{t \to x_0^-} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}}_{\leq 0}$

e quindi deve essere $= 0$

cioè $f'(x_0) = 0$

<u>Teorema</u> x_0 p.to di estremo locale e f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

ci dà una condizione <u>necessaria</u> perché un p.to in cui f è derivabile sia di estremo

non vale il <u>viceversa</u>

se $f'(x_0) = 0$ $\not\Rightarrow$ x_0 p.to di estremo locale per f

<u>controesempio</u> $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$

$x_0 = 0$ $f'(0) = 0$

$x = 0$ <u>non</u> è estremo per la funzione x^3

$f'(x_0) = 0$ è condizione <u>necessaria</u> perché x_0 p.to di estremo (in cui f è derivabile) ma <u>non</u> è condizione <u>sufficiente</u>

Def. I punti $x \in (a,b)$: $f'(x)=0$ si chiamano p.ti **stazionari** (critici)

es. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ | p.ti stazionari

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0$

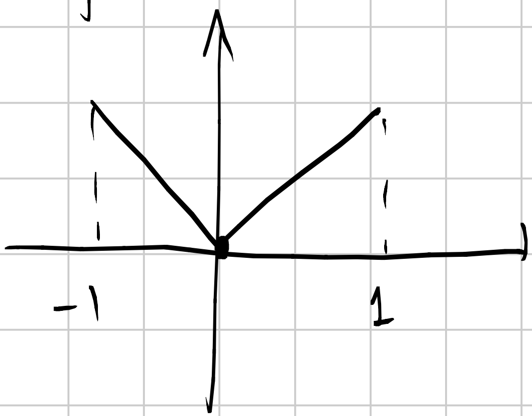
$\cos x = \operatorname{sen} x$ ....

Il teorema di Fermat ci dice che se f è derivabile in (a,b) i p.ti di estremo li cerchiamo tra i punti stazionari

Oss. **Teo.** x_0 p.to di estremo $\not\Rightarrow f'(x_0)=0$

NO!

es. $f(x) = |x|$ in $[-1,1]$



$x=0$ p.to di minimo globale

$f(0)=0$

es. $f(x) = 3x^2 - 5x$

$f'(x) = 6x - 5 = 0$

$x = 5/6$

$x = \frac{5}{6}$ è l'unico p.to stazionario di $f(x)$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $f'(x) = \cos x = 0$

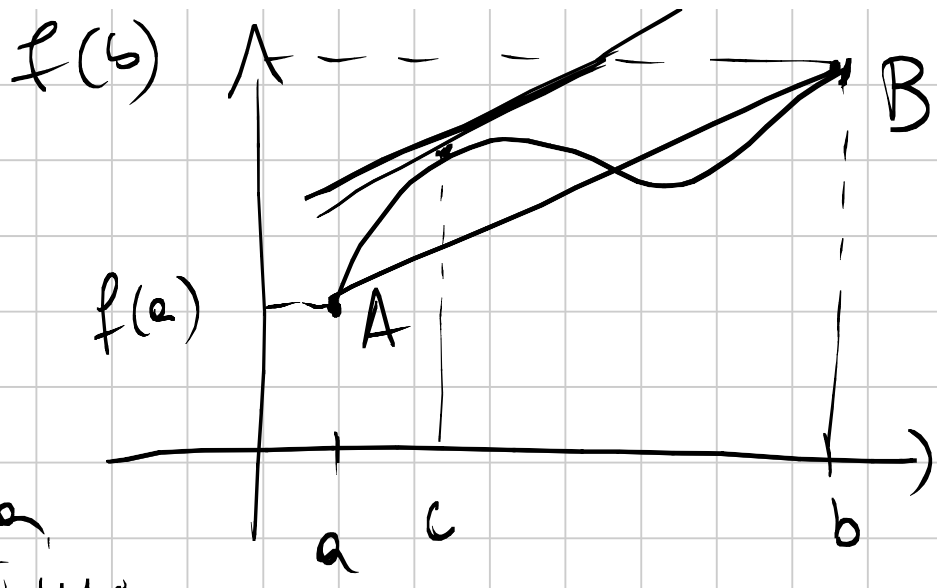
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Teorema di Lagrange (Valor medio)

f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) allora $\exists\ c \in (a,b)$:

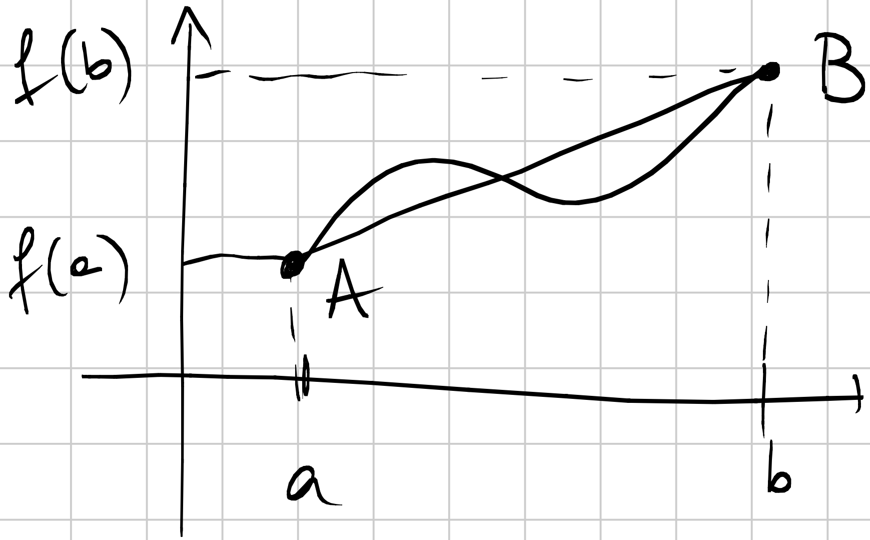
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} =$$ pendenza della retta per A e B



$f'(c) =$ pendenza della retta tangente in un p.to

Dim.



retta passante per A e B

$A = (a, f(a))$

$B = (b, f(b))$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \qquad y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)$$

$$\underbrace{y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$$

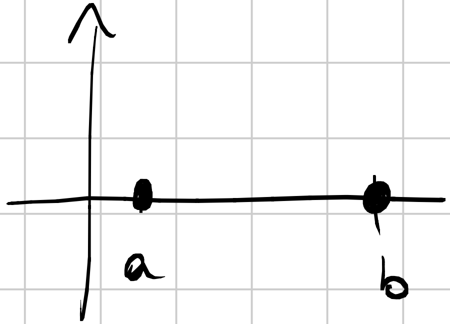
eq. retta per A e B

$w(x) = f(x) -$ retta per A e B

$$w(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

$x = a$
$x = b$

$$w(a) = 0 = w(b)$$



$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

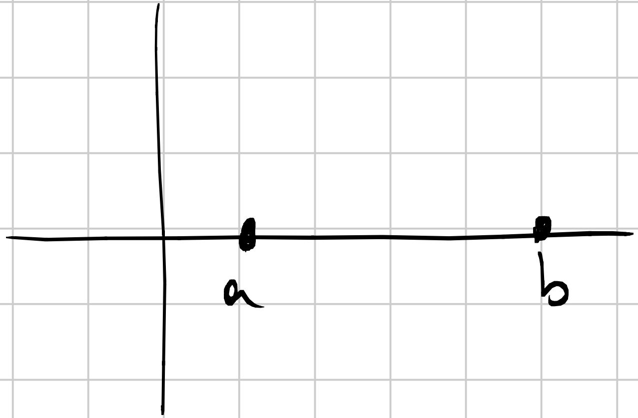
$w(x)$ è continua in $[a,b]$ per il teorema di Weierstrass $\exists$ x_1 e x_2 t.c.

$w(x_1) = M$ massimo in $[a,b]$

$w(x_2) = m$ minimo in $[a,b]$

1) se $M = m$

$w(x)$ è costante in $[a,b]$



$w'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

se $w'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ $\quad f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\quad \forall x \in (a,b)$

il teorema è vero $\forall x \in (a,b)$!

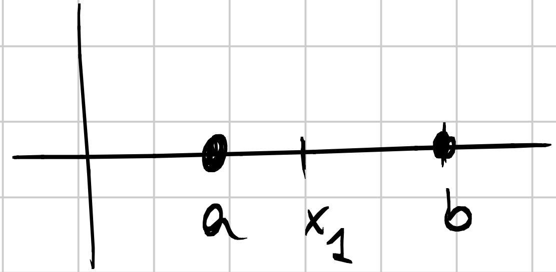
2) $M > m$ $\quad$ M max di w

m min di w

perché $w(a) = w(b)$

uno dei due p.ti

di max e min $(x_1$ e $x_2)$



non si trova agli estremi

dell'intervallo cioè è un p.to interno

per es. x_1 è interno $w(x_1)$ p.to

di estremo $\Rightarrow$ per il teorema di

Fermat $\Rightarrow$ $w'(x_1) = 0$

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$w'(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \exists\, x_1 \in (a, b):$$

Conseguenze del teorema di Lagrange

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

f è derivabile in $x=0$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \begin{cases} \displaystyle 1 & h \to 0^+ \\ \displaystyle -1 & h \to 0^- \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$?

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{cases}$$

Conseguenza del <u>teorema di Lagrange</u>

<u>Teo.</u> f continua in $x = a$

se esiste $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ allora esiste la derivata destra $f'_+(a)$ e coincide con tale limite

e analogamente per la derivata sx.

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$$

oss. se $\nexists \lim_{x \to a^+} f'(x)$ può può esistere $f'_+(a)$.

$\sim \cdot \sim$

__Def.__ $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- se $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ $(-\infty)$

$f'(x_0) = +\infty$

si dice che f ha un flesso a tangente verticale in x_0.

es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

derivabilità? $\quad f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}} \quad x \neq 0$

f è derivabile $\forall x \neq 0$

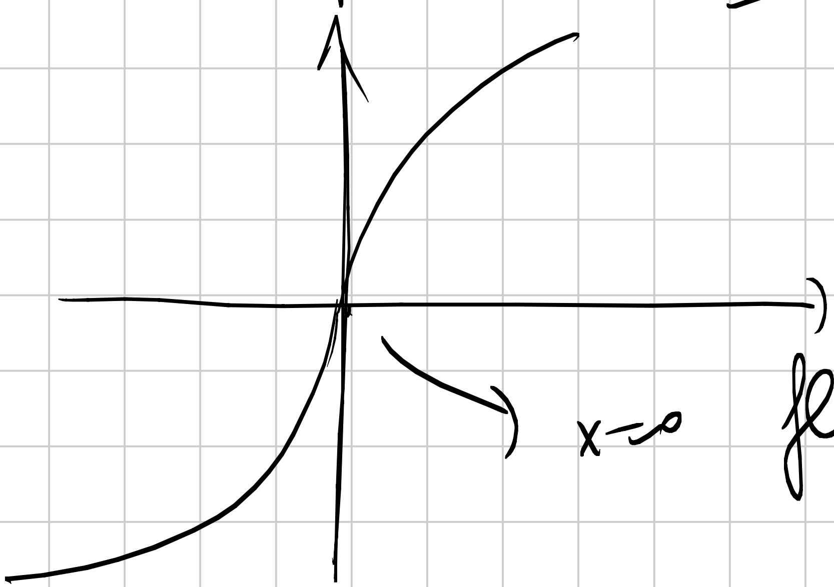
$x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

si può scrivere che

$f'(0) = +\infty$

ma comunque f <u>non</u> è derivabile in $x=0$



$x=0$ flesso a tangente verticale

- $f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1$

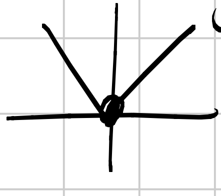
derivata dx

$f'_-(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$

$l_1 \neq l_2$

se f continua in x_0

$\Rightarrow$ x_0 è un p.to <u>angoloso</u> per f

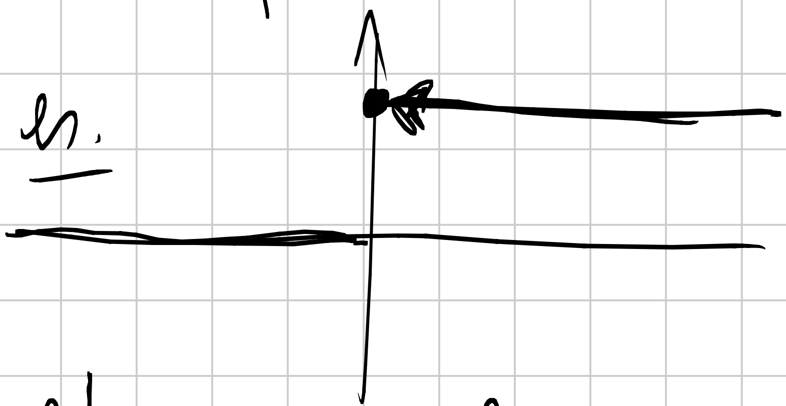
<u>es.</u> $f(x) = |x|$  $f'_+(0) = 1$ $f'_-(0) = -1$

$x=0$ p.to angoloso

es.

se f non è continua in x_0 si può parlare comunque di derivata dx o sx.

es.



$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-1}{h}=0$$

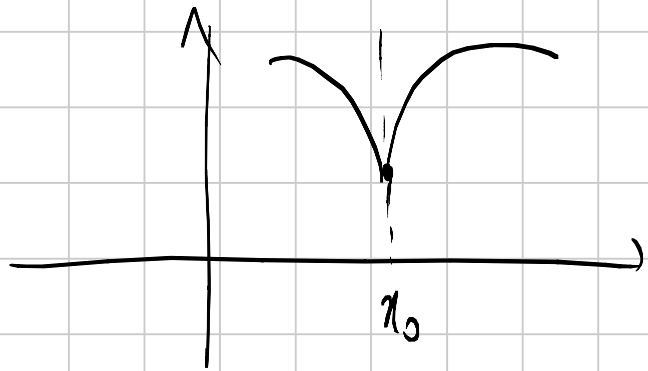
0

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{0-1}{h}=+\infty$$

si dice che f è derivabile da dx
(ma non da sx).

- f continua in x_0 e $f'_+(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$
  $f'_-(x_0) = -\infty$ $(+\infty)$

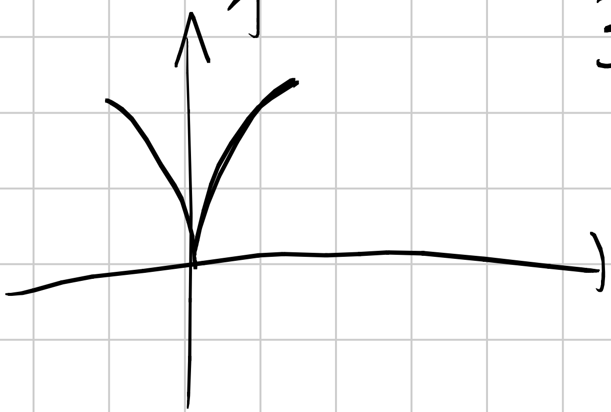
$\Rightarrow$ f ha una <u>CUSPIDE</u> in x_0



es. $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ è pari

$x \to 0^+$

$x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to +\infty$



$x \to 0^- \quad f' \to -\infty$

(perché è pari).

• $f(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$

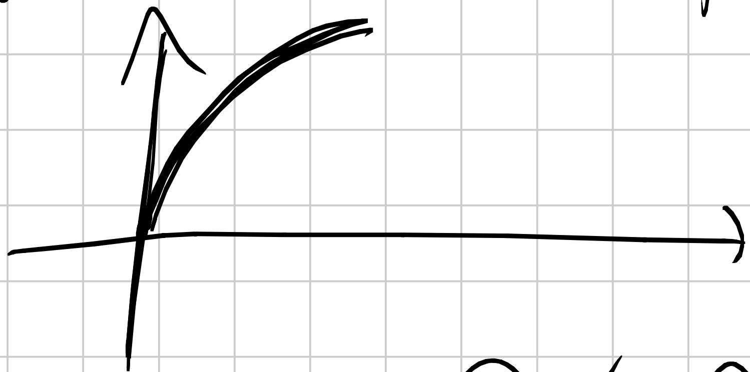
ha senso solo chiedersi se $\exists$ la derivata dx in $x = 0$

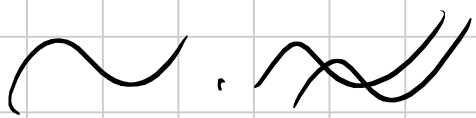
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty \qquad x \to 0^+$$

$$f'_+(0) = +\infty$$

$f(x) = \sqrt{x}$ non è derivabile da dx in $x = 0$

si dice che $x = 0$ è p.to a tangente verticale





es. di prima $\quad f(x) = \sqrt[3]{|x|} = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x > 0 \\ \dfrac{1}{3}(-x)^{-2/3} \cdot (-1) \end{cases}$$

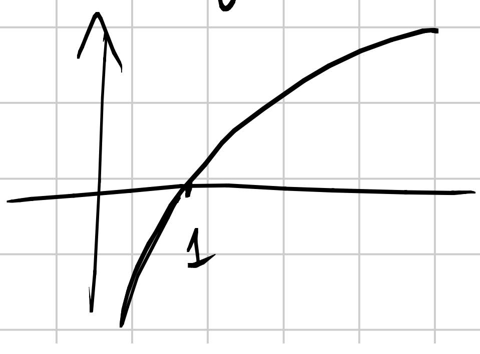
$x \to 0^+$, $f' \to +\infty$

$x \to 0^-$, $f' \to -\infty$

funzioni del tipo $|f(x)|$

<u>es.</u> $g(x) = |\log x|$

$f(x) = \log x$

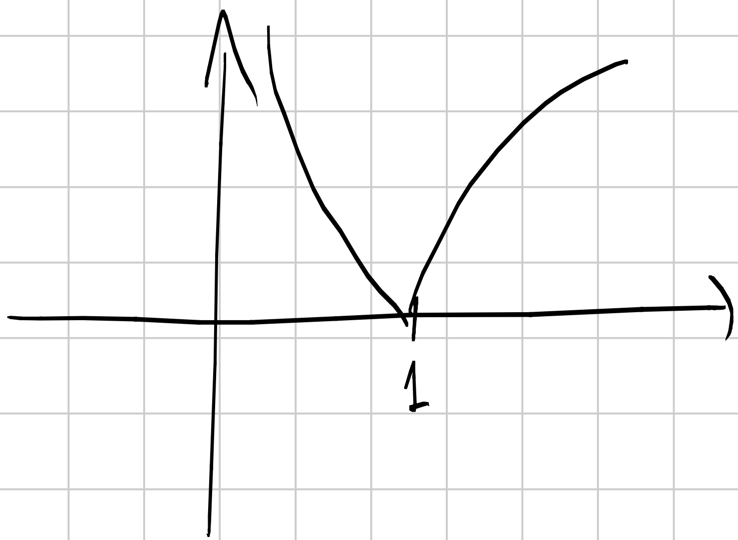


Dominio

$x > 0$

continua $\forall x > 0$

derivabile $\forall x > 0$



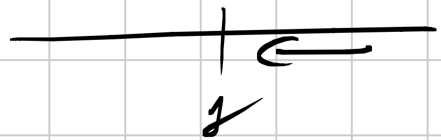
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$|\log x| = \begin{cases} \log x & \text{se } \lg x \geq 0 \\ -\log x & \text{se } \lg x < 0 \end{cases}$$

$$|\log x| = \begin{cases} \log x & \dots \quad x \geq 1 \\ -\log x & 0 < x < 1 \end{cases} = g(x)$$

$|\log x|$ <u>non</u> è derivabile in $x = 1$

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x > 1 \\ -\dfrac{1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$



$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} g'(x)$$

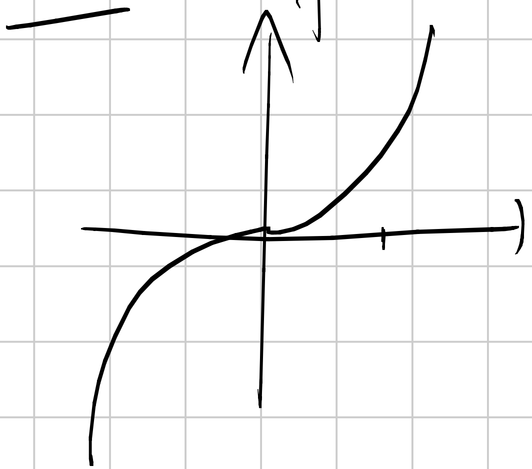
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} g'(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(-\frac{1}{x} \right) = -1$$

$x = 1$ è un p.to angoloso per la funzione $|\log x|$

$\frown \quad . \quad \sim$

<u>es.</u> $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



f continua $\forall x \in \mathbb{R}$

f derivabile ? $\quad x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$?

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} (-2x) = 0$$

f è derivabile anche in $x = 0$ $\quad f'(0) = 0$

$$f(x) = e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & x \geqslant 1 \\ e^{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

f continue $\forall x \in \mathbb{R}$

f derivable

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x > 1 \\ -e^{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f' = \lim_{x \to 1^+} e^{x-1} = 1 = f'_+(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f' = \lim_{x \to 1^-} \left(-e^{1-x}\right) = -1 = f'_-(1)$$

p.to angoloso in $x = 1$.