25 Novembre

- punti stazionari di f $= \{ f'(x) = 0 \}$

- Fermat : nei punti in cui f è derivabile gli estremi si cercano tra i p.ti stazionari.

- $\exists\, c \in (a, b) : \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Teorema (test di monotonia)

f derivabile in (a,b). Allora

f crescente in (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$

f decrescente in (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$

Dim. $\Rightarrow$ Hp. f crescente $\quad z > x \Rightarrow f(z) \geq f(x)$

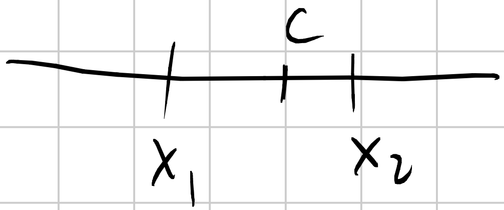
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0 \underset{\substack{\text{poiché } f \\ \text{è derivabile}}}{\Longrightarrow} \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0$$

(permanenza del segno)

$(\Leftarrow)$ Hp. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ $\Downarrow$ $f'(x) \geq 0$

Ts f crescente $\quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$



per Lagrange

$\hookrightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = \underbrace{f'(c) \geq 0}_{\text{per ipotesi}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$$

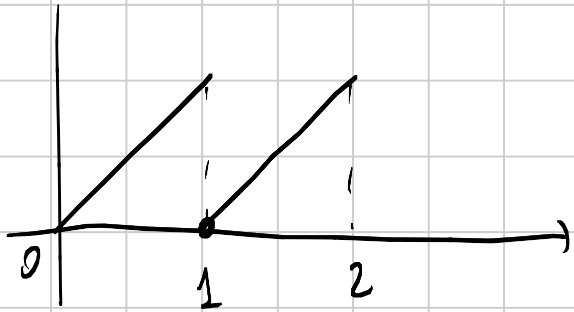
#

errore: $\underline{Hp.}$ $f'(x) \geq 0$ $\underline{Ts.}$ f crescente

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - \cancel{x}} \geq 0 \quad \not\Rightarrow \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$$

$\underline{\text{oss.}}$ f deve essere derivabile in $\underline{\underline{\text{tutto}}}$ (a,b)

$\underline{\text{es.}}$



$(a,b) = (0,2)$

$f' \geq 0$ dove esiste f'

$\underline{\underline{\text{ma}}}$ non è crescente in $(0,2)$

__oss.__ se $f'(x) > 0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f è strett. crescente in (a,b)

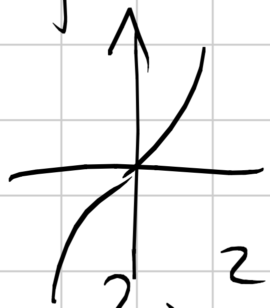
(dim.: uguale a quella sopra con Lagrange)

se f è strett. crescente in (a,b) $\not\Rightarrow$ $f'(x) > 0$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$

controesempio $f(x) = x^3$

è strett. crescente ma



$f'(x) = 3x^2 \geq 0$

e non > 0

Teo. (funzioni a derivata nulla)

f derivabile in (a,b)

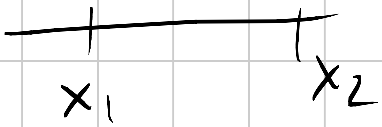
$$f'(x) = 0 \text{ in } (a,b) \iff f \text{ è costante in } (a,b)$$

Dim. $\Leftarrow$ fatto

$\Rightarrow$ Hp. $f'(x) = 0$ in (a,b)

Ts. f è costante in (a,b)

cioè $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$



$f(x_1) = f(x_2)$

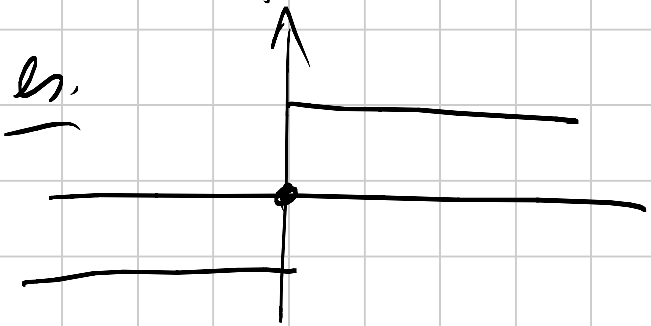
$\exists c \in (x_1, x_2)$ applico Lagrange all'intervallo (x_1, x_2)

$$0 = f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

#

oss. f deve essere derivabile in tutto (a, b)

es.



$f(x) = \operatorname{sgn} x$

f non è costante su tutto $\mathbb{R}$

ma si applica il teorema "a pezzi"

si applica in $(-\infty, 0)$ $\Rightarrow$ f costante in $(-\infty, 0)$

si applica in $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ f costante in $(0,+\infty)$

con un'altra costante!

$\sim . \sim$

<u>applicazione</u>

se f, g derivabili in (a,b)

$$f'(x) = g'(x) \text{ in } (a,b) \iff f(x) = g(x) + \text{costante in } (a,b)$$

<u>dim</u>:

$$(f-g)' = 0 \Rightarrow f-g = \text{costante}$$

$\sim . \sim$

Ricerca di max e min (locali e globali) di una funzione

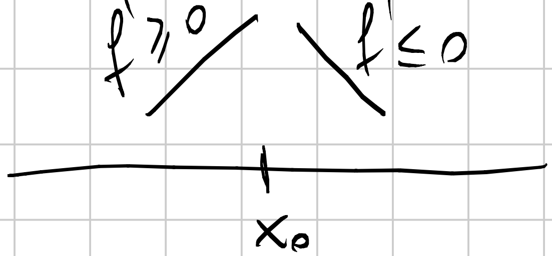
f derivabile in $[a,b]$. Per cercare max e min:

1) Si calcola $f(a)$, $f(b)$.

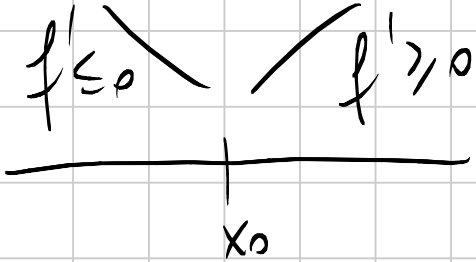
2) Si cercano i punti stazionari: $f'(x)=0$

e si vede cosa fa il segno di f' in un intorno di questi punti

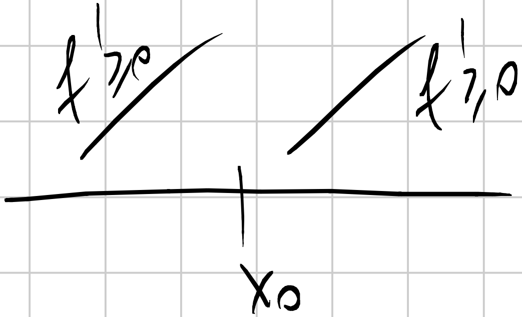
x_0 punto stazionario



x_0 punto di max



x_0 p.to di min.



$\left(f(x) = x^3 \right)$

x_0 p.to di flesso

x_0 p.to di flesso.

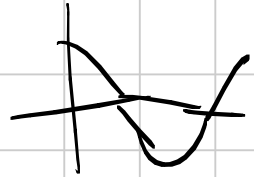
3) Si calcola la f nei p.ti di max e di min trovati sopra e si confrontano con $f(a)$, $f(b)$.

es. $f(x) = \operatorname{sen} x$ derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad f'>0 \quad f'<0$ $\quad \pi/2$

$x = \frac{\pi}{2}$ p.to di max



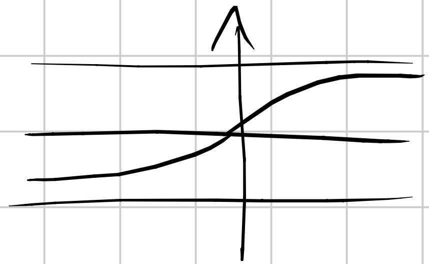
$x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad f'<0 \quad f'>0$ $\quad \frac{3\pi}{2}$

p.to di min.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ max globale

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ minimo globale es. $f(x) = e^x$ derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow f$ è strett. crescente in tutto $\mathbb{R}$



es. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)$

calcoliamo la derivata di $\operatorname{arctg} y$

$$f(x) = y = \operatorname{tg} x \iff x = \operatorname{arctg} y = f^{-1}(y)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad y \in \mathbb{R}$$

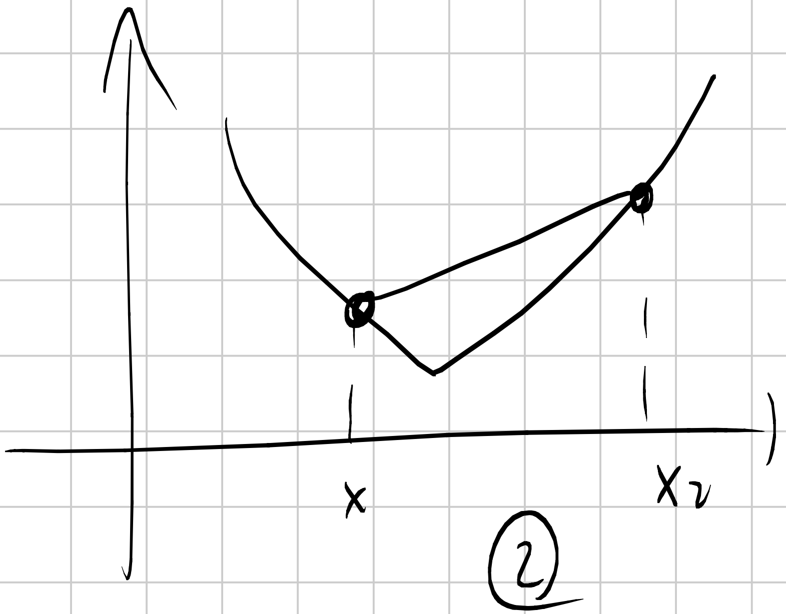
$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad y = f(x)$$

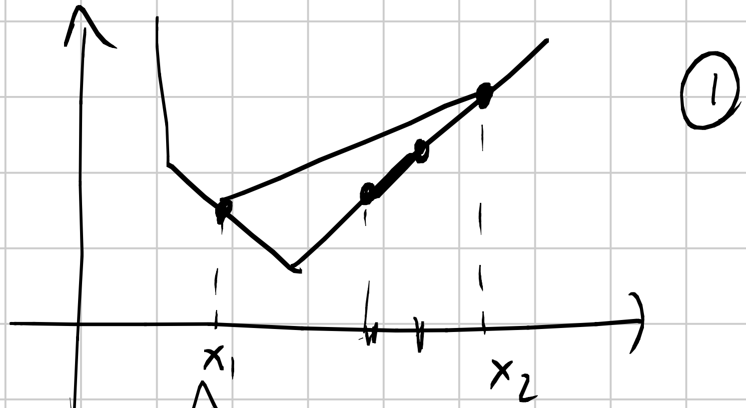
$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

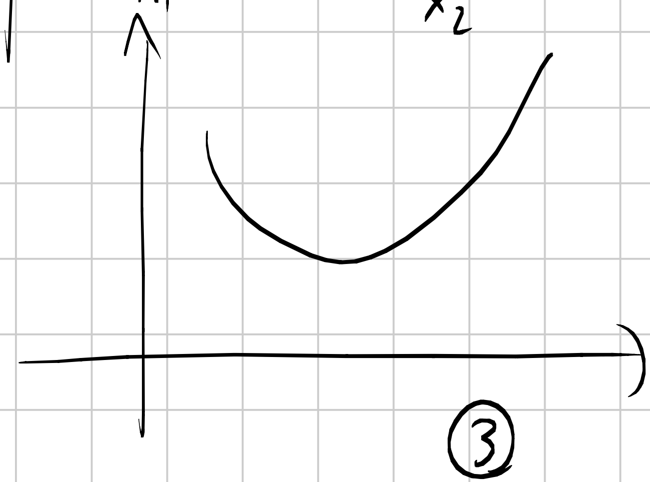
$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow$$ arctg x è strett. crescente.

Funzioni convesse







Def. f definita in un intervallo (a,b)

f è convessa in (a,b) se $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$

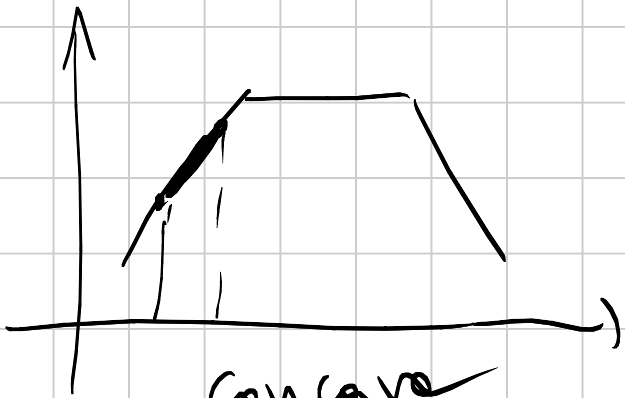
il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

non ha punti sotto il grafico di f.

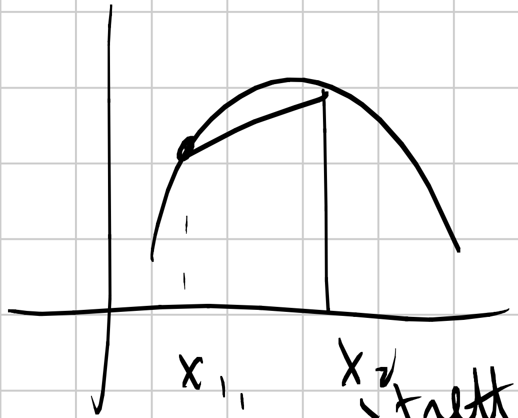
- Se gli unici punti in comune col grafico sono gli estremi $\Rightarrow f$ è **strettamente convessa**

f concava $\quad (-f$ è convessa$)$

'..... "sopra" al posto di "sotto"'

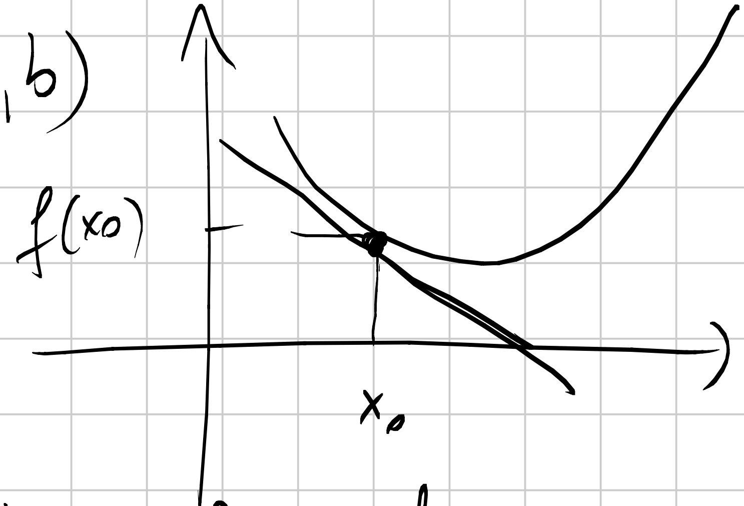


concava

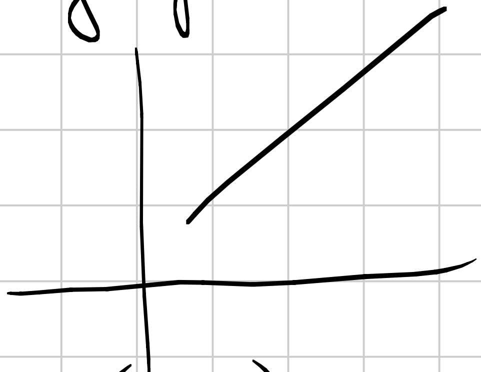


strett. concava

Se f è derivabile in (a,b)



f è convessa se in ogni p.to la retta tangente non ha punti sopra il grafico



Teo. f derivabile due volte in (a,b)

f è convessa in (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in (a,b)

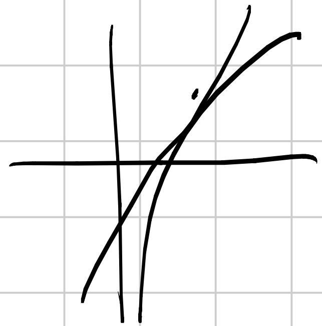
se $f''(x) > 0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f è strett. convessa in (a,b)

f è concava in (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in (a,b)

es. $f(x) = e^{x}$, $f'(x) = e^{x}$, $f''(x) = e^{x} > 0$

e^{x} è strett. convessa

es. $f(x) = \log x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$



$x > 0$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f(x)$ strett. concava

es. $f(x) = x^{\alpha} \qquad x > 0$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad f''(x) = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} > 0$?

$\alpha(\alpha - 1) > 0 \iff \alpha > 1$

o

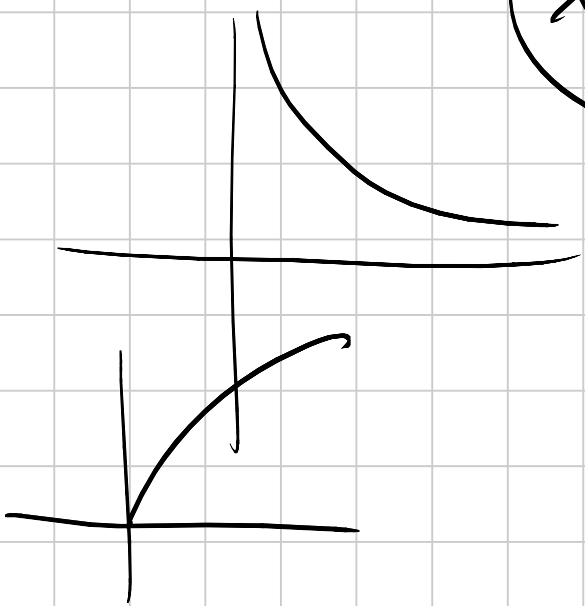
$\alpha < 0$

x^{α} è strett. convessa $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$

$x > 0$

x^2 strett. convessa

$\frac{1}{x}$ " "

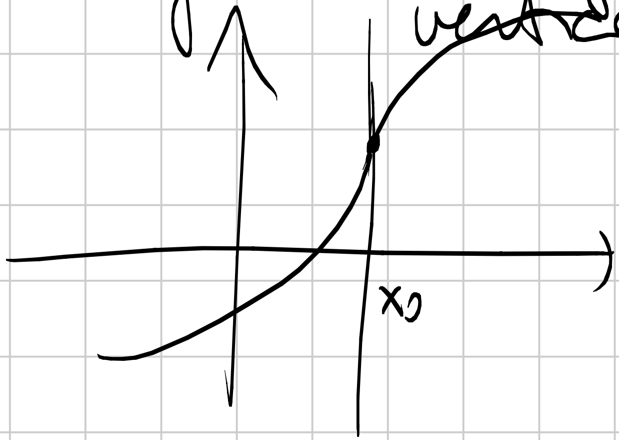


$\sqrt{x}$ strett concava

Def. $x_0 \in (a,b)$ è un p.to di flesso per f se esiste un intorno di x_0 in cui f cambia concavità (x_0 è t.c. $\exists f'(x_0)$ finito o infinito).

se $f'(x_0) = +\infty$
$= -\infty$

flesso a tangente verticale

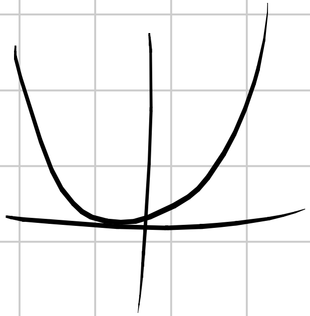


Teorema f derivabile due volte in x_0
e x_0 p.to di flesso $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

non vale il viceversa

se $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ p.to di flesso es. $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$



ma $x = 0$ non è p.to di flesso.

---

es. $f(x) = \operatorname{sen} x$

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ p.to di max

$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ p.to di min.

$f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0$ $\qquad x = 0$

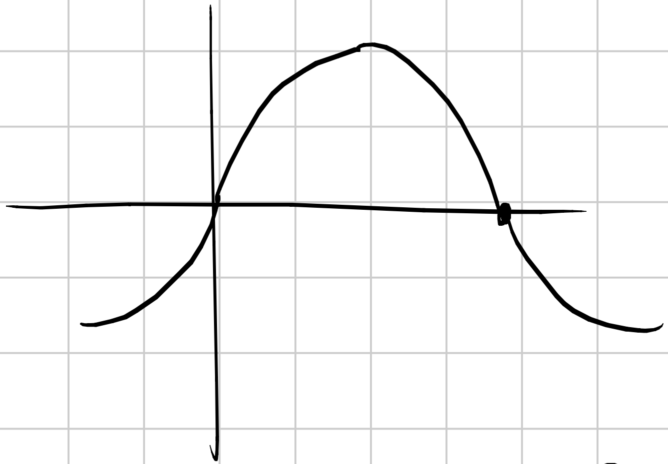
$x = \pi$

$+ \ldots 2k\pi$

$x = 0$ $\qquad f'' > 0 \quad f'' < 0$

$x = 0$

$x = 0$ p.to di flesso



$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$$f''(x) = (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

$f''>0$ $\quad$ $f''<0$

0

$f''>0 \quad x<0$

$f''<0 \quad x>0$

$x=0$ p.to di flesso

Esercizi su derivate e derivabilità

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

$$h(x) = x^{x} = e^{x\log x}$$

$$h'(x) = e^{x\log x} \cdot \left(1 \log x + x\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{x}\left(\log x + 1\right)$$

$$h(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$$

$$= e^{\operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x)} + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$$

$$h'(x) = e^{\operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x)} \left(\cos x \cdot \log(\operatorname{sen} x) + \cancel{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \cos x \right)$$

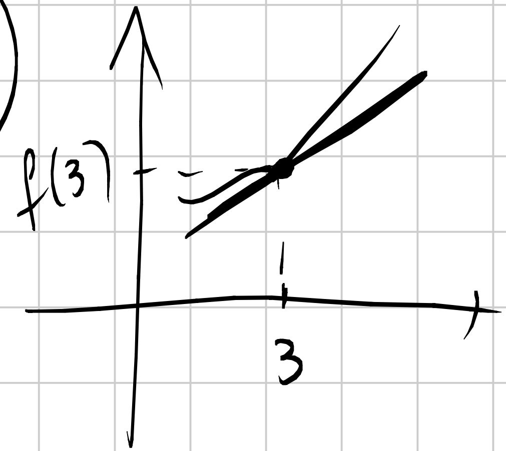
$$+ \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x =$$

$$= (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \left(\cos x \log(\operatorname{sen} x) + \cos x \right) +$$

$$+ \cos(\operatorname{sen} x) \cos x$$

es. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$

Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel p.to $\left(3, f(3)\right)$



$f'(x_0)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eq. retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

$$f(3) = \operatorname{arctg}(\log 2)$$

$$f'(x_0) \qquad f'(x)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2\left(\sqrt{x+1}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} =$$

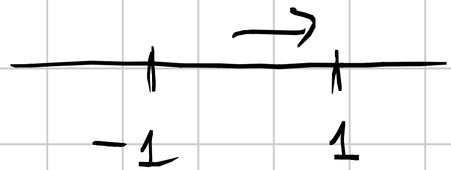
$$= \frac{1}{1+\log^2\left(\sqrt{x+1}\right)} \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{(x+1)}$$

$$f'(3) = \frac{1}{1+\log^2 2} \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{4} = \frac{1}{8(1+\lg^2 2)}$$

$$y = \operatorname{arctg}(\log 2) + \frac{1}{8(1+\log^2 2)} \cdot (x-3)$$

Es. Dire se la seguente funzione è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \end{cases}$$



tutto O.K. se $x \neq \pm 1$

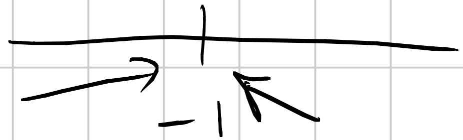
Continuità in $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1)^2 = 4$$

f non è continua in $x=1$

Continuità in $x = -1$



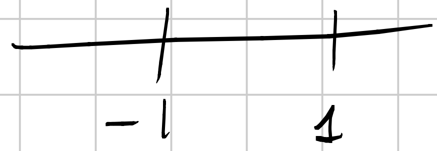
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} (x+1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0$$

è continua in $x=-1$

$f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Studiamo la derivabilità in $x = -1$



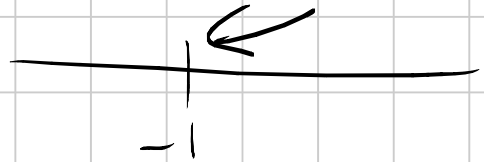
$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) \,, & |x| > 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \dfrac{-2x}{(1-x^2)^2} \,, & |x| < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-(1-x^2)^{-1}} \right) =$$

$$= e^{-(1-x^2)^{-1}} \cdot (-1)(-1)(1-x^2)^{-2}(-2x) =$$

$$= e^{-(1-x^2)^{-1}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)^2}$$



$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) =$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{-2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} =$$

$1-x^2=y$

$x \to -1$

$y \to 0+$

$$= z^2 e^{-z} = \frac{z^2}{e^z} \to 0$$

$\frac{1}{y} = z \qquad z \to +\infty$

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} 2(x+1) = 0 = f'_-(-1)$$

f è derivabile in $x = -1$