Lezione del 26 Ottobre

Cap 3

1

Limiti di successioni

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

è una successione

$\{a_n\}$ $\quad a_n$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$a_n = n^2$ $\qquad n \longrightarrow n^2 \qquad n \in \mathbb{N}$

$0, 1, 4, 9, 16, \ldots$

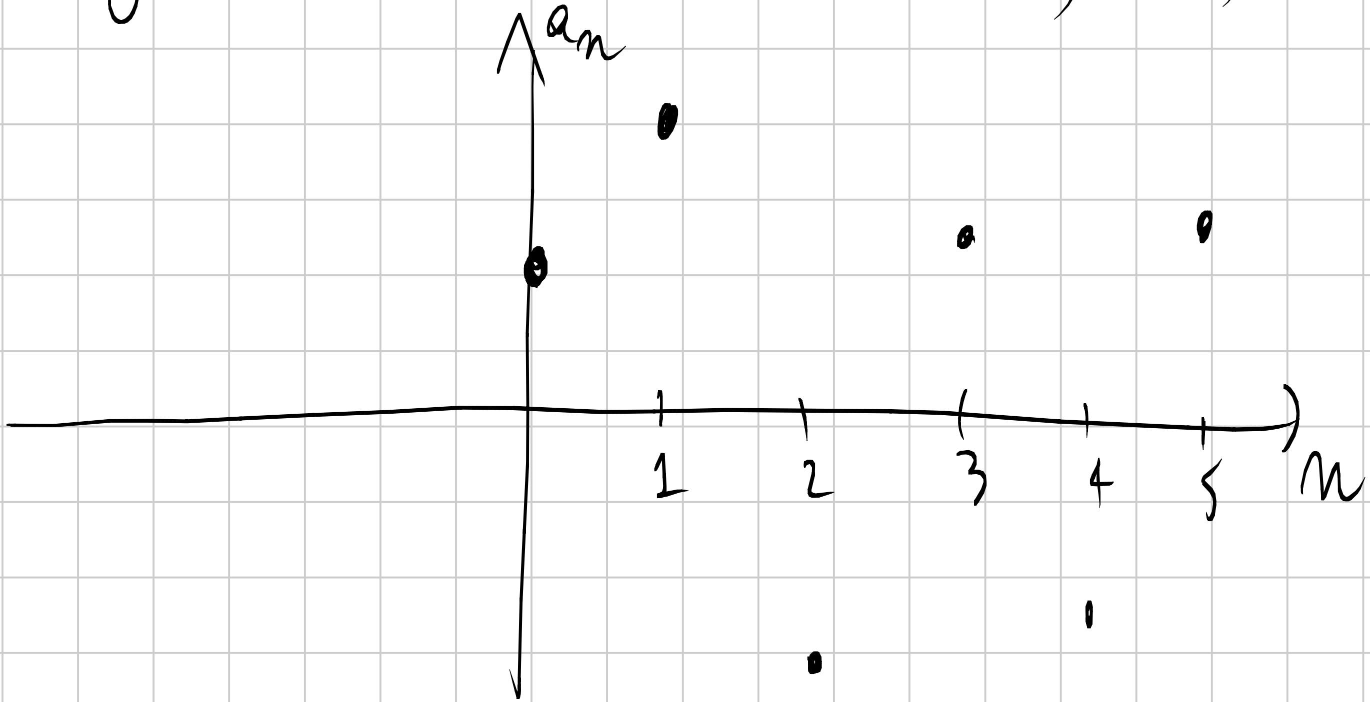
$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1 \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$a_n = 17$

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$a_n = \sqrt{n - 27}$

Si possono visualizzare (n, a_n)



$n = 0 \quad a_0$

a_1

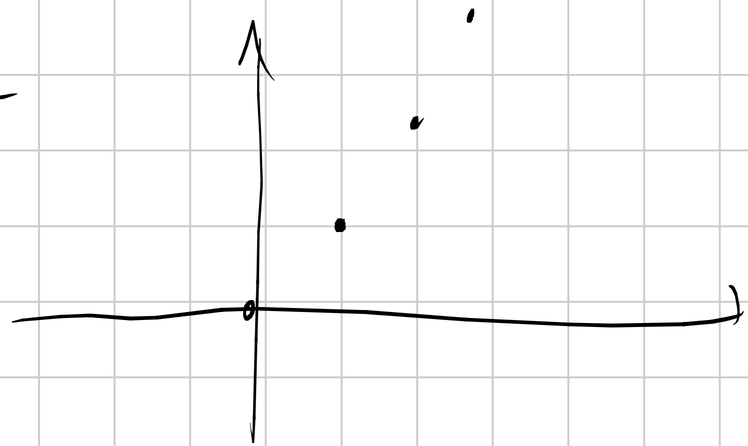
Def. $\{a_n\}$ è limitata inferiormente se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

è limitata superiormente se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

è limitata se $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Es. $a_n = n^2$

es. $a_n = n^2$



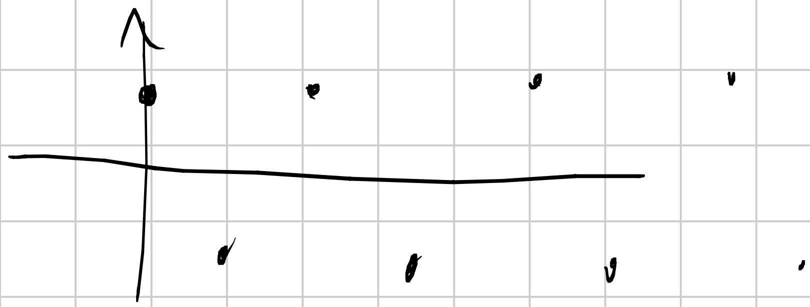
è limitata inferiormente ma non superiorm.

$\exists M \quad a_n \leq M \quad , \forall n$

$n^2 \leq M \quad , \forall n$

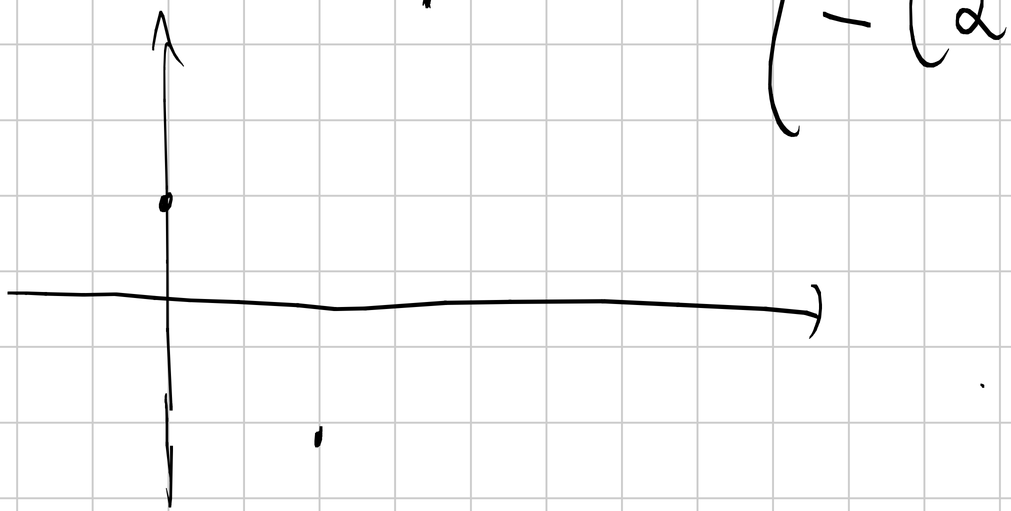
$n \leq \sqrt{M}$

es. $a_n = (-1)^n$



è limitata

es. $a_n = (-2)^n = \begin{cases} 2^n & n \text{ pari} \\ -(2^n) & n \text{ dispari} \end{cases}$



non è limitata né inf. né superiormente.

Def. Dico che $\{a_n\}$ possiede una certa proprietà **definitivamente** se $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. a_n ha quella proprietà $\forall n \geq N$.

Es. $a_n = n^2 - 6n$ è definitivamente positiva

$\exists N$ t.c.
$a_n > 0 \quad , \forall n \geq N$

$n^2 - 6n > 0 \qquad n(n-6) > 0$
$\Rightarrow n > 6$

es. $a_n = \frac{1}{n}$ è definitivamente $< \frac{1}{100}$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100} \qquad n > 100$$

Def. di limite di successione

Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$.

(se $\forall \varepsilon > 0$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente)

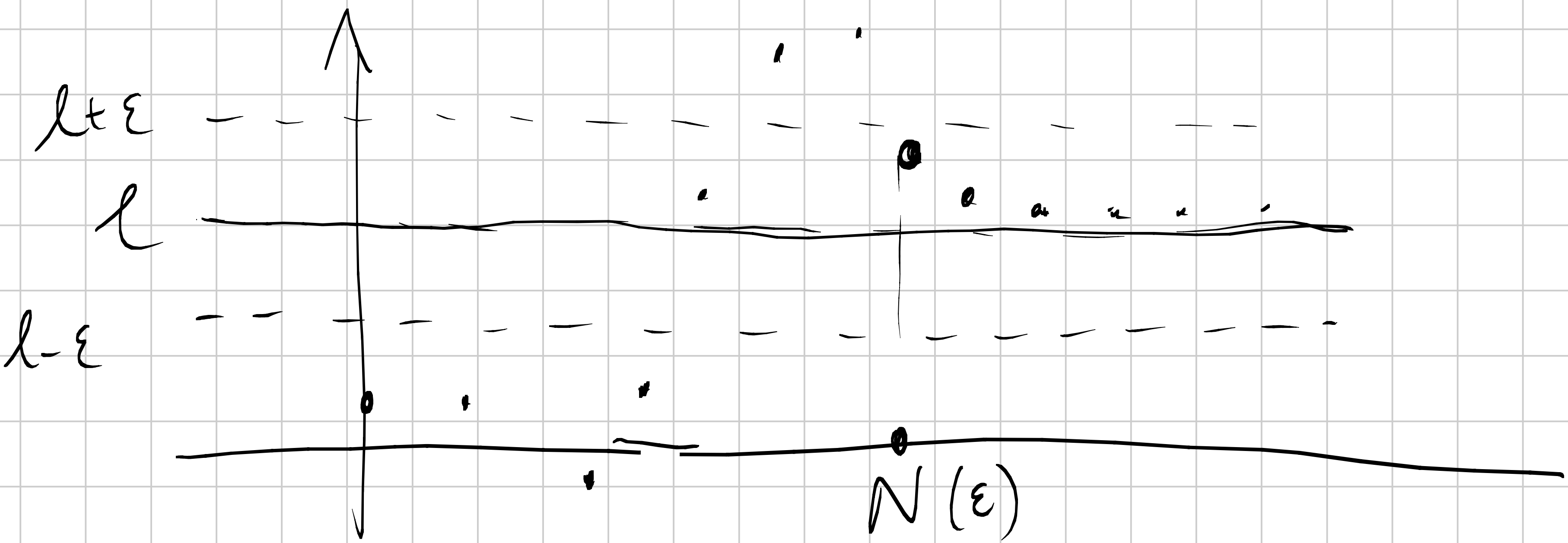
e si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ e

l è il limite della successione

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \qquad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \qquad \lim a_n = l$$

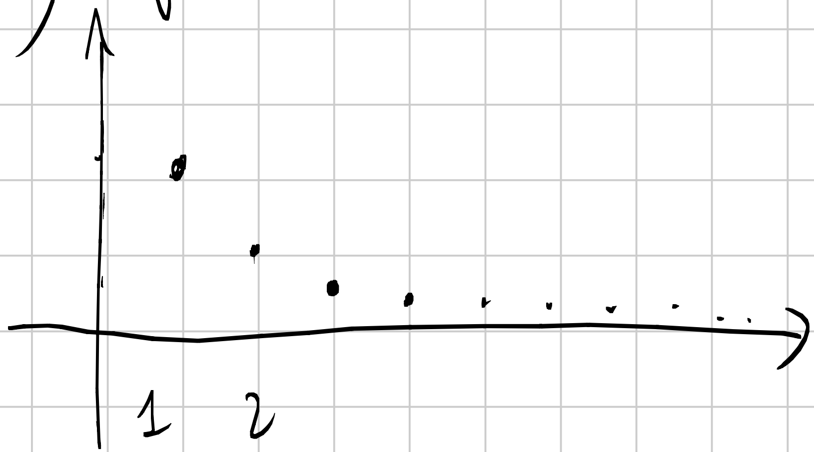
$$|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

$$\iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$



__oss.__ N (della soglia) dipende da ε

__es.__ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$



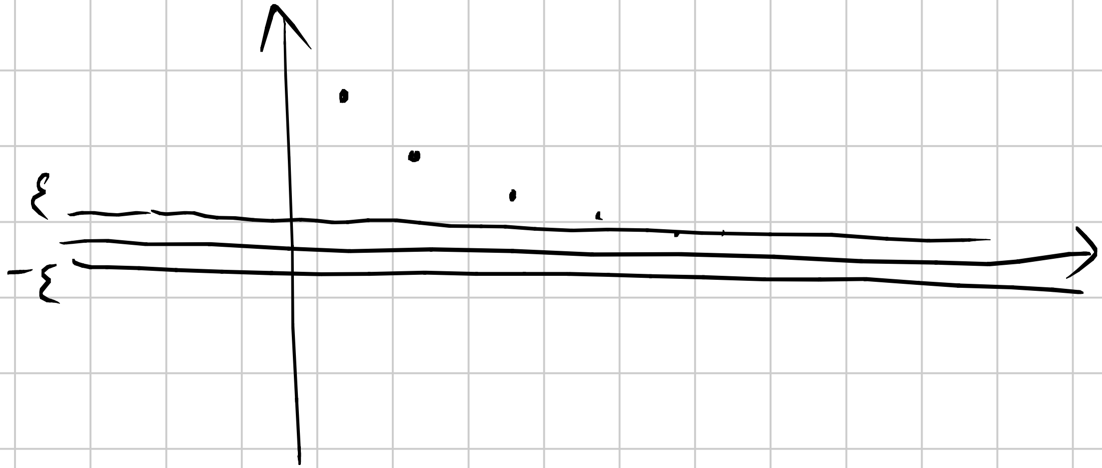
$\forall \varepsilon>0 \ \exists N$ t.c. $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \, , \forall n>N$

Devo trovare N

$\frac{1}{n}<\varepsilon \longrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

scelgo N il primo intero più grande di $1/\varepsilon$ e trovo il risultato

$\varepsilon = \frac{1}{100}$



$n > 100$

$\varepsilon = 1$

$n > \frac{1}{\varepsilon} = 1$

$$\lim_{n} \frac{1}{n} = 1$$ Provare!

es. $$\lim_{n \to +\infty} 3^{1/n} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \text{ t.c. } \left| 3^{1/n} - 1 \right| < \varepsilon, \ \forall n > N$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{1 - \varepsilon < 3^{1/n}}_{} < 1 + \varepsilon$$

sempre vero perché $3^{1/n} > 1 > 1 - \varepsilon$

$$3^{1/n} < 1+\varepsilon \qquad \frac{1}{n} < \underbrace{\log_3(1+\varepsilon)}_{>0}$$

$$n > \frac{1}{\log_3(1+\varepsilon)}$$

Prop. Se $\{a_n\}$ è convergente, il limite è unico.

Dim. Se ce ne fossero due l_1 e l_2

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \quad |a_n - l_1| < \varepsilon, \ \forall n > N_1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \quad |a_n - l_2| < \varepsilon, \ \forall n > N_2$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \qquad n > N$$

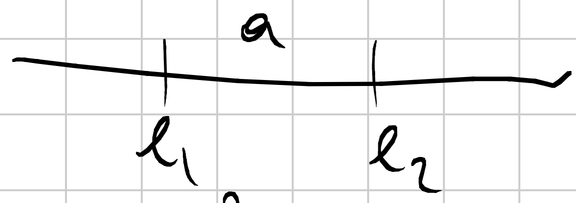
$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq$$

$$\left(|x+y| \le |x| + |y| \right)$$

$$\le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Quindi $|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

se $l_1 \neq l_2$



$a < 2\varepsilon$

se prendo ε t.c. $a > 2\varepsilon$

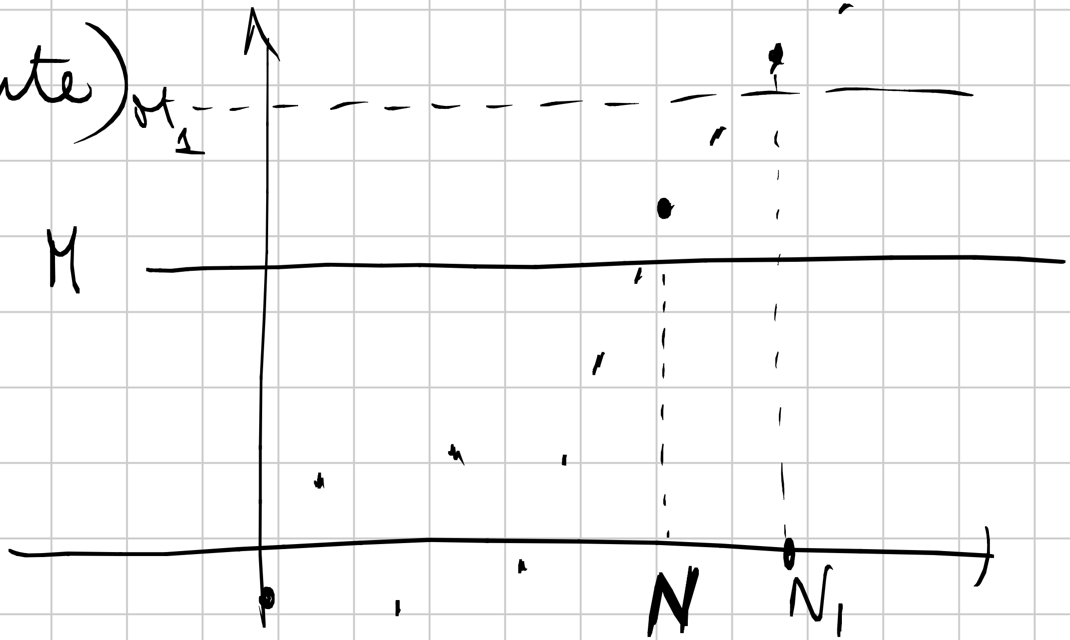
$\Longrightarrow l_1 = l_2$

Successioni divergente

Def. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ significa

$\forall M > 0 \quad \exists N$ t.c. $a_n > M, \ \forall n > N$

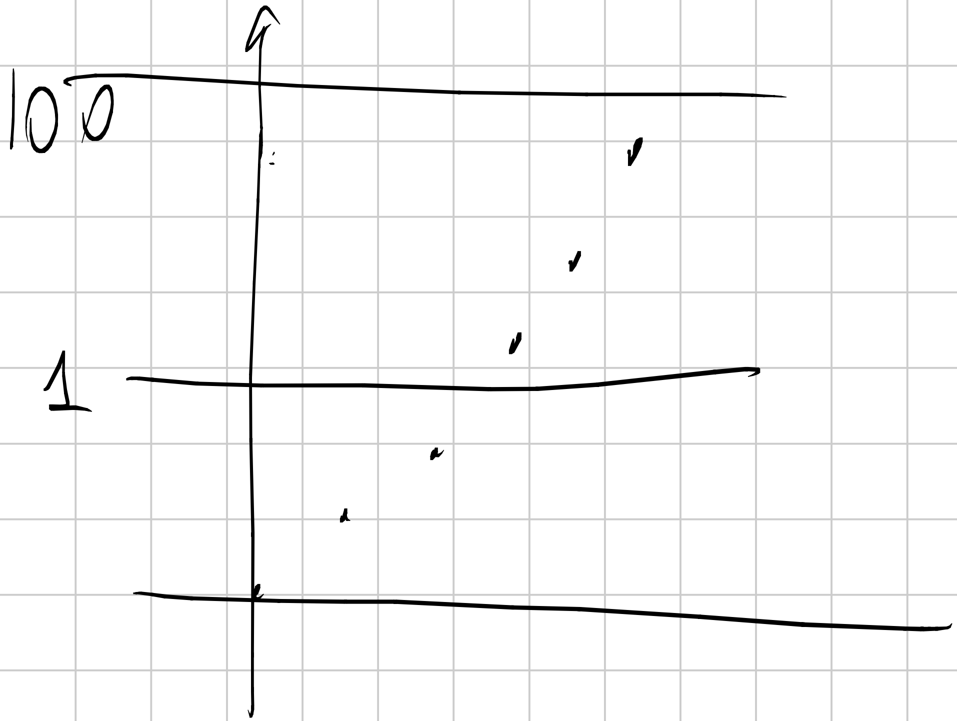
($\forall M > 0$, $a_n > M$ definitivamente)



N dipende da M

es. $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\forall M > 0 \ \exists N$ t.c. $n^2 > M, \ \forall n > N$



$$n^2 > M$$

$$\Downarrow$$

$$n > \sqrt{M} \quad N$$

$M = 1$

$M = 100 \qquad n > \sqrt{100} = 10$