Lezione del 30 Novembre

Asintoti di una funzione

$f(x)$ ① $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

$y = b$ asintoto orizzontale per f, $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

ha asintoto oriz. in $y = \pi/2$
$x \to +\infty$

e in $y = -\frac{\pi}{2}$
$x \to -\infty$

(2) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

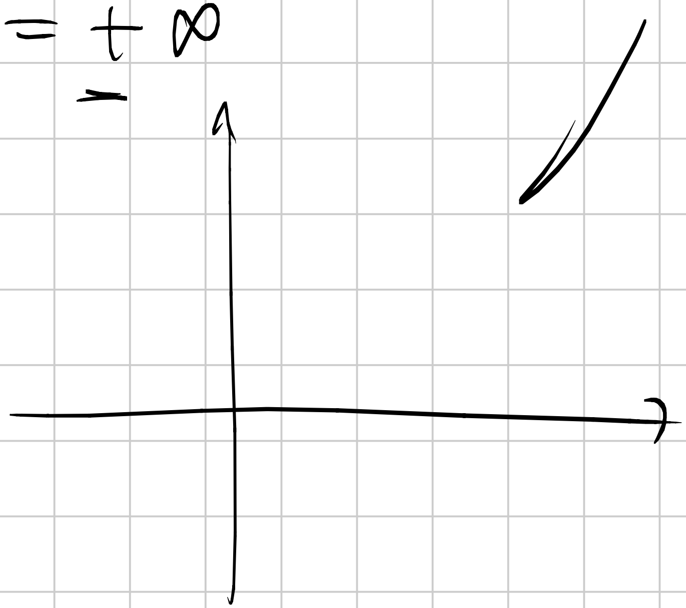
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

$x = x_0$ è un asintoto verticale per f

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x=0$ è asintoto verticale

$f(x) = \operatorname{tg} x$

③ supponiamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$



$y = mx + q$ asintoto obliquo $x \to +\infty$

$m \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(f(x) - (mx+q) \Big) = 0$$

$\Updownarrow$ è equivalente

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$

es. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

c'è asintoto obliquo?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

$m = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

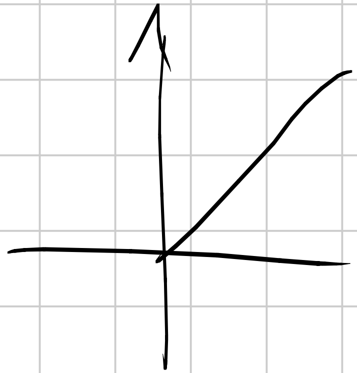
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 = q$$

$x \to +\infty$ $\quad y = mx + q = x$

$\sqrt{x^2+1}$

$x \to -\infty$?

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$



$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \ldots$

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad f(-x) = \sqrt{1+x^2}$

$x \to -\infty$ asintoto $y = -x$

è pari

es. $f(x) = \log|e^x - 4| - \operatorname{arctg}(e^x - 5) - \log 4$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(gli altri pezzetti tendono a zero)

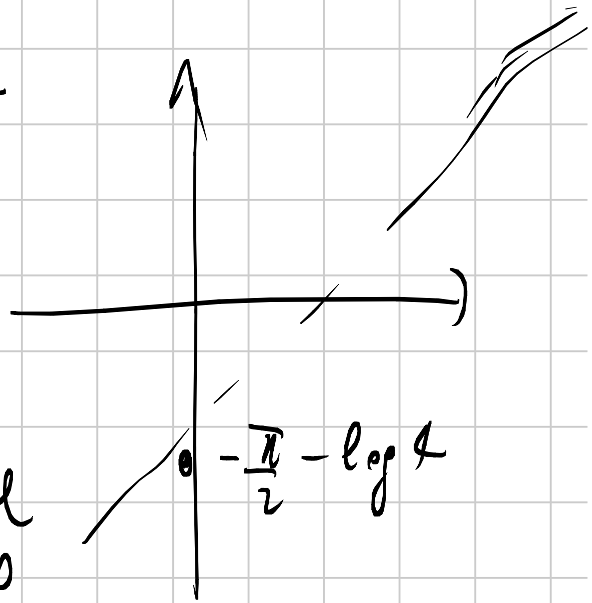
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - 4)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x}\log\left(1 - \frac{4}{e^x}\right) = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} + \log\left(1-\frac{4}{e^x}\right) - \arctan\left(e^x - 5\right) - \log 4 - \cancel{x} = -\frac{\pi}{2} - \log 4 = q$$

$x \to +\infty$ $\qquad y = x - \frac{\pi}{2} - \log 4$



P.C. $\quad x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

asintoto orizzontale $x \to -\infty$

Studio dei grafici di funzione.

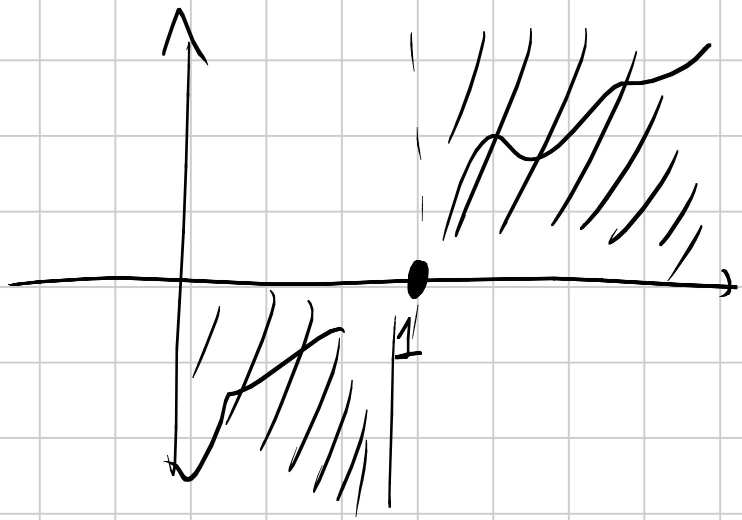
- dominio della funzione D
- eventuali simmetrie (pari, dispari, simmetrie) e particolari costituzioni.
- In alcuni casi, studio del segno di f.
- limiti agli estremi del dominio D, eventuali asintoti oriz., verticali, obliqui. e eventuali pti di discontinuità.
- Regolarità di f: dove è continua, dove è derivabile, calcolo di f'

- si cercano i p.ti stazionari $f'(x)=0$, segno di f' e monotonia
- $\lim_{x \to x_0^-} f'$, $\lim_{x \to x_0^+} f'$ "attacchi" di f in x_0 di "non derivabilità".

  studiare la natura dei p.ti di non derivabilità: p.ti angolosi, cuspidi, a tg. verticale.
- f'', dove esiste e segno di f''
- grafico

Esercizio

$f(x) = x \log|x|$



$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-x) = -x \log|-x| = -x \log|x| = -f(x)$

dispari

studio $x > 0$

segno.

$f(x) = x \log x > 0 \iff \log x > 0 \iff x > 1$

$f(x) = 0 \iff \log x = 0 \iff x = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\log x}{\cancel{x}} = +\infty \quad \nexists$$

asintoti obliqui

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$$

$f(x)$ è estendibile per continuità in $x=0$

$$f(0) := 0$$

$x>0$ $\quad f(x) = x\log x$ è derivabile $\forall x>0$

$$f'(x) = \log x + \frac{x}{x} = \log x + 1 = 0$$

$$\log x = -1 \qquad x = \frac{1}{e}$$

p.to stazionario

$f'(x) > 0$

$\log x + 1 > 0$

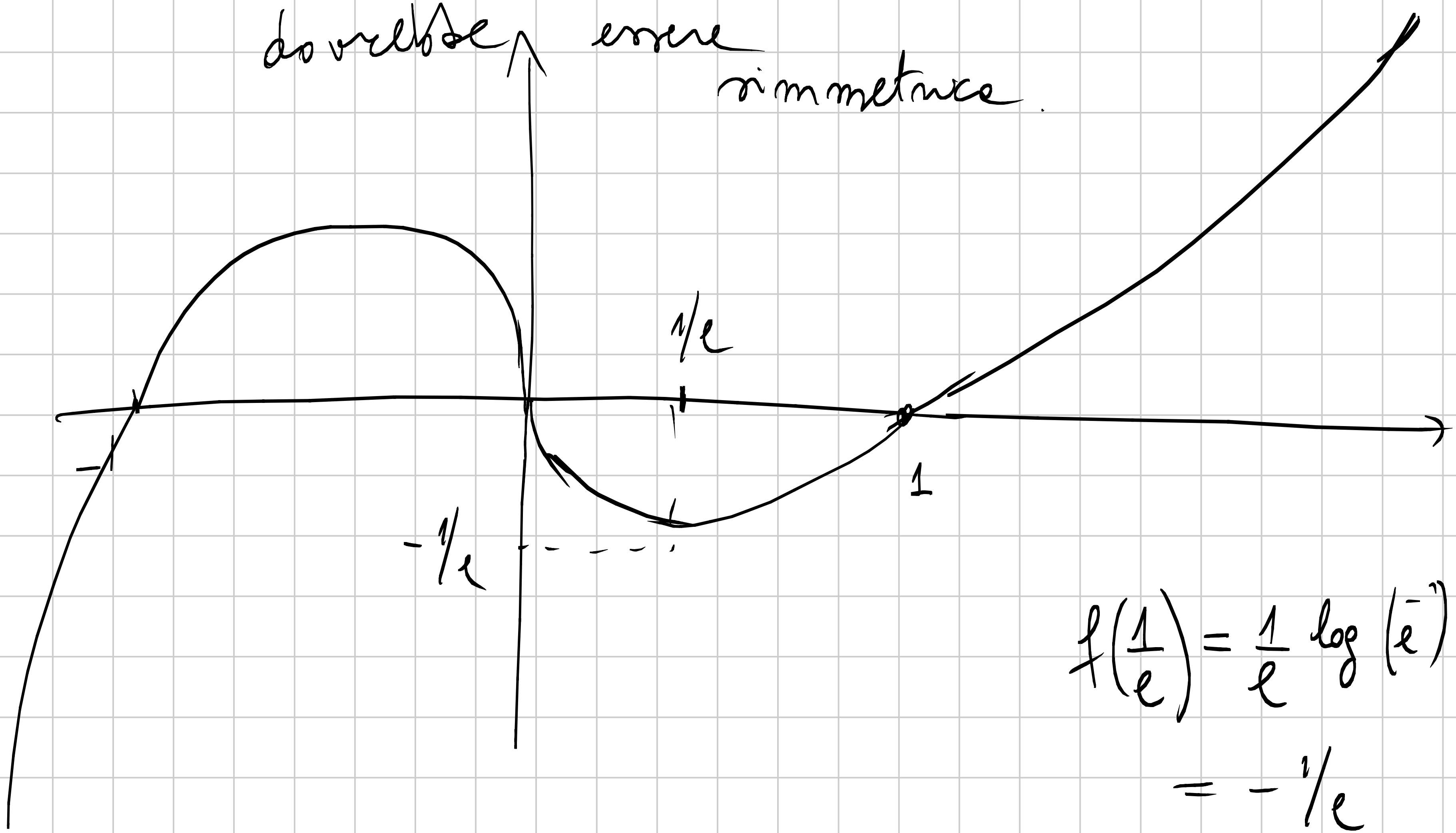
$x > 1/e$

$x = \frac{1}{e}$ p.to di minimo

attacco in $x=0$ $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (\log x + 1) = -\infty$ flesso a tg. verticale.

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ $x > 0$ è strett. convessa $\forall x > 0$

dovrebbe essere simmetrica.



$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\log\left(e^{-1}\right)$$

$$= -1/e$$

Esercizio $\quad f(x) = 3^{-\frac{1}{|\text{sen}\,x|}}$

$$D = \{x : \text{sen}\,x \neq 0\} = \{x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$|\text{sen}\,x|$

$f(x)$ è periodica di periodo π

studio per $(0, \pi)$ dove $|\text{sen}\,x| = \text{sen}\,x$

$$f(x) = 3^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \quad \text{in} \quad (0,\pi)$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0,\pi)$$

$$\lim_{x \to 0^+} 3^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 0$$

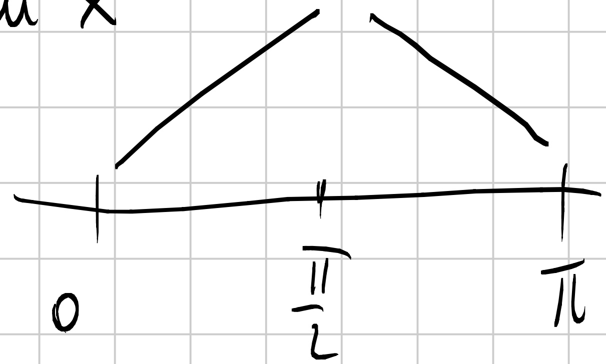
$$\lim_{x \to \pi^-} 3^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 0$$

è estendibile per continuità

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\log 3}$$

$$f'(x) = 3^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \cdot (-\log 3)\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) \cdot \cos x =$$

$$= 3^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \log 3 \, \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$



$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) > 0 \iff \cos x > 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$ p.to di massimo

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1/3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{-1/\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}^2 x} \log 3 \cdot \cos x = 0$$

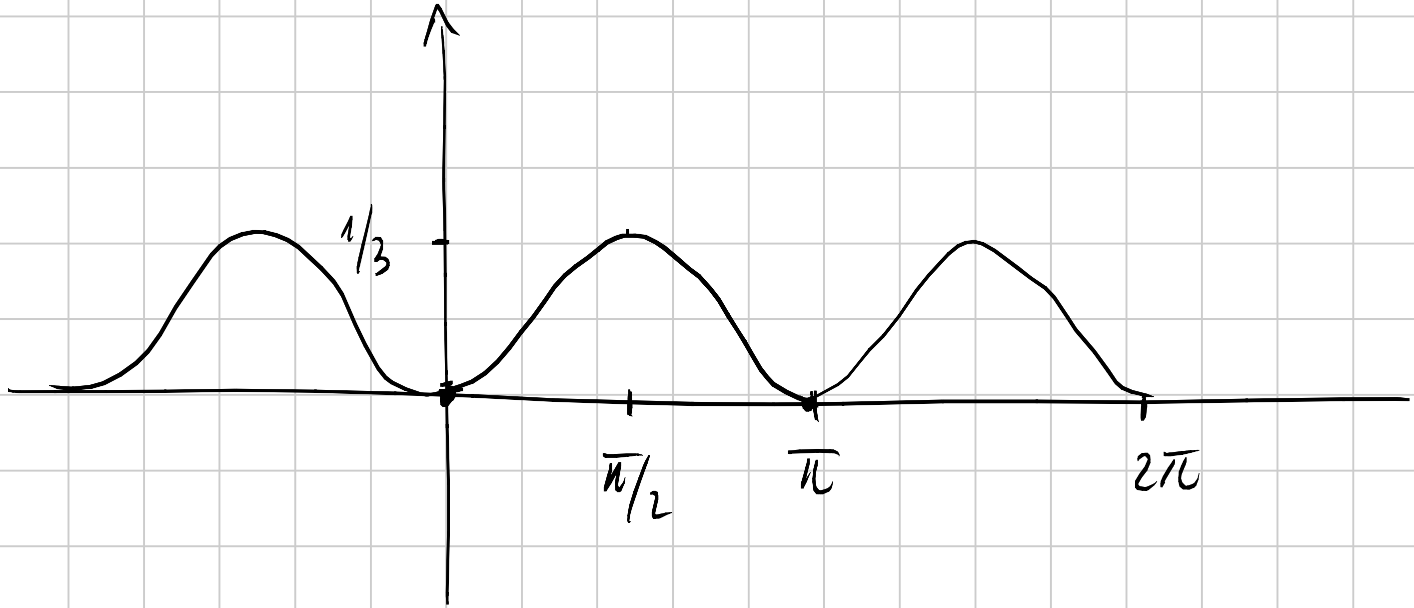
$\operatorname{sen} x = y$ $\quad x \to 0^+$, $y \to 0^+$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{3^{-1/y}}{y^2} = 0$$

$\left(\frac{1}{y} = z \ldots\ldots\right)$

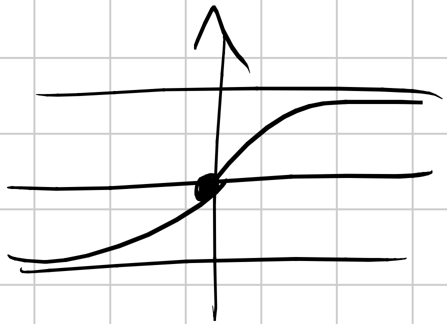
$$\lim_{x\to \pi^-} f'(x) = 0$$ (analogamente)

non è richiesta la f''



1/3
π/2
π
2π

es. $f(x) = |\operatorname{arctg}(\log x)|$



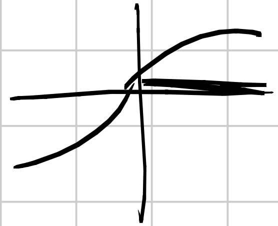
$D = \{x > 0\}$

$f(x) \geq 0$ $\quad f(x) = 0 \iff \operatorname{arctg}(\lg x) = 0 \iff$

$\iff \lg x = 0 \iff x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\log x) & \text{se } \operatorname{arctg}(\lg x) \geq 0 \\ -\operatorname{arctg}(\lg x) & \text{se } \operatorname{arctg}(\lg x) < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}(\lg x) \geq 0$$



$$\Downarrow$$

$$\lg x \geq 0 \iff x \geq 1$$

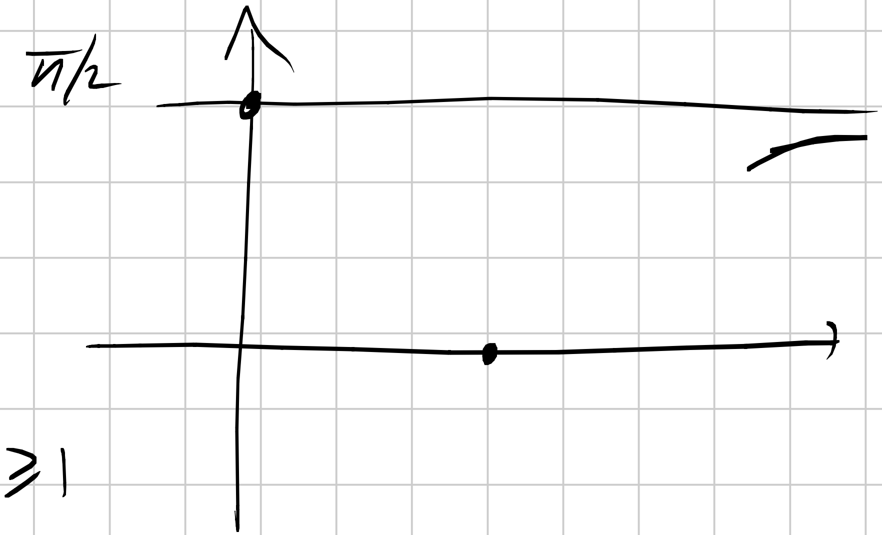
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\log x) & x \geq 1 \\ -\operatorname{arctg}(\log x) & x < 1 \end{cases}$$

$$D = \{x > 0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

asintoto orizzontale



$x \geq 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

$x < 1$

cose succede in 1

$x = 1$

f'' domani.