Lezione del 4 Novembre

- Def. di successione convergente, divergente e indeterminata
- Successione convergente $\Rightarrow$ è limitata
- Unicità del limite
- Permanenza del segno $\left(a_n \to a \, , \, a > 0 \Rightarrow \underset{\text{definitiv.}}{a_n > 0} \right)$

  $a > \ell \Rightarrow \underset{\text{definit.}}{a_n > \ell}$
- Teorema del confronto $a_n \to \ell \, , \, c_n \to \ell \, , \, a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow b_n \to \ell$

- Operazioni sui limiti nel caso finito $a, b \in \mathbb{R}$

  $a_n + b_n \to a + b$

  $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

  ....

  e caso infinito

- forme d'indecisione

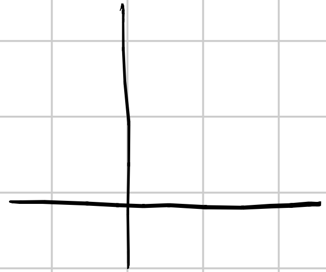
- Successioni monotone : non possono mai essere irregolari

$$\lim_n a_n = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \pm\infty \end{cases}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$$

- $$\lim_n q^n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & |q|<1 \\ \nexists & q\le -1 \end{cases}$$

$q \in \mathbb{R}$



$q = -\frac{1}{2}$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

- $$\lim_n \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$$

$\alpha > 0$

$a > 1$

- $$\lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)^{1000} \to 0$$

Criterio del rapporto

Teo a_n successione positiva $(a_n > 0, \forall n)$

se esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ e

$l < 1$ allora $a_n \to 0$, se $l > 1$ (anche $+\infty$)

allora $a_n \to +\infty$

(se $l = 1$ non posso dire niente).

es.

$$\lim_{n} \frac{3^n}{n!} = 0$$

$= a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{\cancel{3^{n+1}}}{(n+1)!}}_{a_{n+1}} \cdot \frac{n!}{\cancel{3^n}} = \frac{3 \, \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \to 0$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1$ criterio del rapporto $a_n \to 0$

$$\lim_{n} \frac{b^n}{n!} = 0 \quad , \quad \forall\, b > 1$$

(fare voi con b al posto del 3)

$n!$ è un infinito di ordine superiore a b^n

$$\log_a n \qquad n^\alpha \qquad a^n \qquad n!$$

- $$\lim_{n} \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{a_n} = 0$$

con il criterio del rapporto:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overbrace{(n+1)!}^{(n+1)\cdot \cancel{n!}}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\log_a n \qquad n^\alpha \qquad a^n \qquad n! \qquad n^n$$

infiniti in ordine crescente

oss. $\lim_n \underbrace{\frac{b_n}{c_n}}_{a_n} = ?$

il criterio del rapporto funziona se b_n e c_n sono infiniti di ordine diverso. Sennò $l = 1$

es. $\lim_{n} \frac{n+5}{n} = 1$ — a_n

$$\frac{n+5}{n} = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\cancel{n}} \to 1$$

con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+5}{n+1} \cdot \frac{n}{n+5} = \frac{(n+6)\,n}{(n+1)(n+5)} \to 1$$

Dim. (del criterio del rapporto)

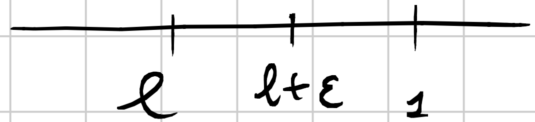
Facciamo caso $\ell < 1$

$\boxed{\text{Ts. } a_n \to 0}$

Hp. $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0$ t.c. $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon}$, $\forall\, n \geq n_0$

Scelgo ε t.c. $\ell + \varepsilon < 1$



• $a_{n+1} < (\ell + \varepsilon)\, a_n$, $\forall\, n \geq n_0$ $(a_n > 0)$

$n = n_0$ $\quad a_{n_0+1} < (\ell + \varepsilon)\, a_{n_0}$

$n = n_0 + 1$ $\quad a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0+1}$ $\quad \odot$ per $n = n_0+1$

$$a_{n_0+2} \leq (l+\varepsilon)\, a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)(l+\varepsilon)\, a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} \leq (l+\varepsilon)^2 a_{n_0}$$

andando avanti

$$a_{n_0+3} \leq (l+\varepsilon)\, a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)(l+\varepsilon)^2 a_{n_0} = (l+\varepsilon)^3 a_{n_0}$$

$$\underbrace{a_{n_0+k}}_{n} \leq \underbrace{(l+\varepsilon)^k a_{n_0}}_{\downarrow}$$

$$(l+\varepsilon)^k = q^k \to 0$$

$l+\varepsilon < 1$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & b_k & \leq & c_k \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

$k \to +\infty$

Teo. del confronto

$b_k \to 0$

$b_k = a_{n_0+k} \to 0$

$a_n \to 0 \quad n \to +\infty$

$\#$

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

OSS. Anche se gli infiniti sono di ordine diverso il criterio del rapporto può non essere utile.

$$\lim_{n} \frac{\log n}{n} \, a_n$$

provo con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \frac{n}{\log n} = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\log(n+1)}{\log n}}_{\to 1}$$

$$\lim_{n} \frac{\log(n+1)}{\log n}$$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\log n} =$$

$$= \frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = 1 + \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}$$

$$\lim_{n} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$$

Quindi $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 1$

il criterio del rapporto non mi dice niente

$$\lim_{n} \frac{\log n}{n} = ?$$

$$\left(= 0 \right)$$

Confronti di infiniti

$a_n, b_n \to \pm\infty$

("le chiamo "infiniti"")

$\frac{a_n}{b_n}$ forma d'indecisione

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ infinito di ordine } \underline{\text{inferiore}} \text{ a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R},\ l \neq 0 & \text{infiniti dello } \underline{\text{stesso}} \text{ ordine} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ infinito di ordine } \underline{\text{superiore}} \text{ a } \{b_n\} \\ \nexists & \text{le successioni } \underline{\text{non}} \text{ sono confrontabili} \end{cases}$$

<u>es.</u> $\lim_n \frac{n^3}{n^2+1} = +\infty$

$$\lim_{n} \frac{n}{n^5+3} = 0$$

$$\lim_{n} \frac{2n^2}{3n^2 + \frac{1}{n} + \operatorname{sen}(n^5)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n} \frac{\cancel{x}\,(\operatorname{sen} n)^2}{\cancel{x}} \nexists$$

le due success. non sono confrontabili

$n(\operatorname{sen} n)$