Serie numeriche

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

1) $a_k > 0$
- confronto
- confronto asintotico
- rapporto, radice

2) La serie ha termini di segno qualunque.

es. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ a termini di segno alterno

$$\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n}$$

Convergenza __assoluta__

$\sum a_k$, a_k segno qualsiasi

__Def.__ $\sum a_k$ converge __assolutamente__ se $\sum |a_k|$ converge.

$\sum a_k$ $\quad |a_k| \geq 0$

__es.__ $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{k^2}}_{a_k}$ converge __assolutamente__?

$|a_k| = \frac{1}{k^2}$ $\quad \sum \frac{1}{k^2}$ conv. sì!

$a_k \to 0 \not\Rightarrow$ serie converge $\sum \frac{1}{k}$

$\sum |a_k|$ è a termini positivi

si applicano i criteri delle serie a termini positivi.

$\sum a_k \quad$ — ? — $\quad \sum |a_k|$

<u>Teorema</u> Se una serie converge assolutamente allora converge (semplicemente)

<u>OSS.</u> <u>non</u> vale il <u>viceversa</u>

<u>ES.</u> $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ conv. assolutamente

$\Rightarrow$ converge.

__Es.__ $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ $\quad |a_k| = \frac{1}{k}$

$\sum \frac{1}{k}$ non converge

__non__ conv. __assolutamente__.

Ma la serie può convergere o no.

__Es.__ $\sum \frac{\cos n}{n^5}$ $\quad |a_n| = \frac{|\cos n|}{n^5} \leq \frac{1}{n^5}$

$\sum \frac{|\cos n|}{n^5}$

criterio del confronto $\Rightarrow$ converge!

$\sum \frac{1}{n^5}$ converge

$\sum \frac{\cos n}{n^5}$ conv. assolutamente
e quindi convergente.

Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno **alterno**, cioè del tipo:

$$\sum (-1)^k a_k \quad , \quad a_k > 0$$

1) $\{a_k\}$ è decrescente
2) $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$

$\Rightarrow$ la serie è convergente

Dim. no.

Es. $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ non conv. assolutamente

1) $a_k = \frac{1}{k}$
2) $\lim \frac{1}{k} = 0$

$\Rightarrow$ **converge!**

$$\sum \frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow$$

$$|a_k| = \frac{1}{k} \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

<u>Es.</u> $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ a_n

1) conv. assoluta $\quad |a_n| = \frac{n-1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n}$

$\sum \frac{n-1}{n(n+1)}$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ $\quad$ <u>non</u> converge assolutamente

diverge

2) convergenza (Leibniz)

1) $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ $\quad$ decrescente

2) $a_n \to 0$ $\quad$ ok!

Verifichiamo che

$$a_n = \frac{n-1}{n(n+1)} \quad \bar{e} \text{ decrescente}$$

$$a_{n+1} \leq a_n \quad , \quad \text{almeno } \forall n > n_0$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{n}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \overset{?}{\leq} \frac{n-1}{n\cancel{(n+1)}}$$

$$\cancel{n^2} \leq (n-1)(n+2) = n^2+2n-n-2$$

$$= \cancel{n^2} + n - 2$$

$0 \leq n-2 \Rightarrow n \geq 2$

a_n è decrescente

<u>Es.</u> Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum e^{-n} \operatorname{sen}(n!\, x) \quad \text{converge}$$

$$|a_n| = e^{-n} |\operatorname{sen}(n!\, x)| \leq 1 \cdot e^{-n}$$

Dal criterio del confronto se

$\sum e^{-n}$ converge $\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Es. $$\sum \underbrace{(-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{2}{n^{1/3}}\right)}_{a_n}$$

Dire per quali $\alpha > 0$ la serie conv. assol. e per quali conv.

$$\log(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

1) conv. assoluta

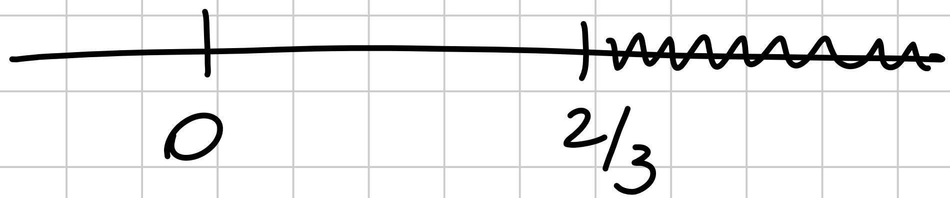
$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{2}{n^{1/3}}\right)$$

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{2}{n^{1/3}} = \frac{2}{n^{\alpha+1/3}}$$

$\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha+1/3}}$ converge

$$\alpha + \frac{1}{3} > 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{2}{3}$$

la serie converge assolutamente per $\alpha > 2/3$



2) Per quali α converge?

$$\sum (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{2}{n^{1/3}}\right)}_{a_n}$$

1) a_n decrescente $\longrightarrow$ sì!

2) $a_n \to 0$

1) $\frac{1}{n^\alpha}$ decresc.

$\frac{2}{n^{1/3}}$ decres. $\log\left(1+\frac{2}{n^{1/3}}\right)$ è decrescente

$\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1+\frac{2}{n^{1/3}}\right)$ è decrescente perché prodotto di decrescenti.

$\frac{n-1}{n^2+n}$ a_n

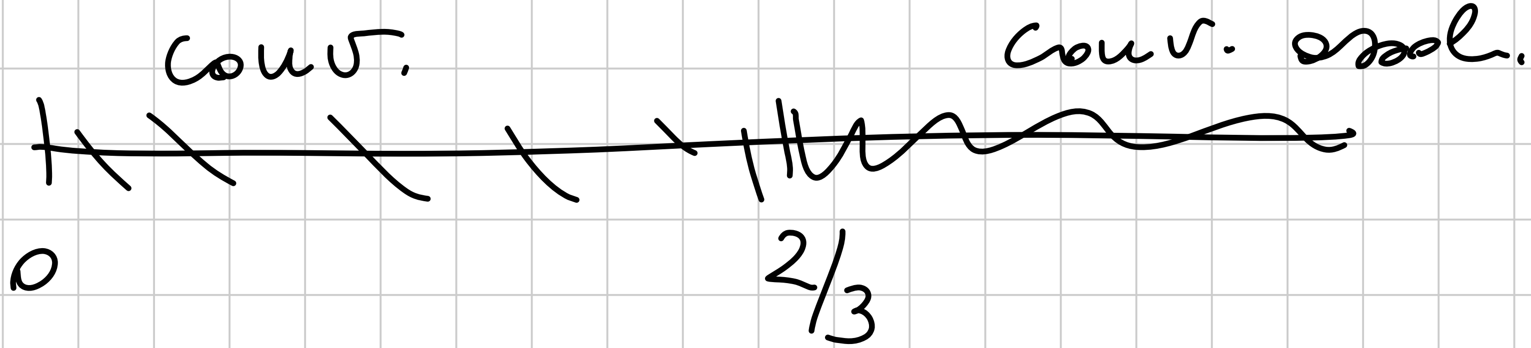
2) $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{2}{n^{1/3}}\right) \xrightarrow{?} 0$

$\frac{2}{n^{1/3}} \to 0$

$a_n \to 0$

Valgono le ipotesi del criterio di Leibniz.

Cioè la serie converge. $\forall \alpha > 0$



PC. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)}{(1+n)^{3\alpha+1}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Trovare gli α t.c. $a_n \to 0$

2) " " " " la serie conv. assolut.

3) " " " " la serie conv.

OSS se $a_n \not\to 0 \implies$ la serie non converge.

1) $\alpha > -1/3$

2) $\alpha > 0$

3) $\alpha > -1/3$

Un'altra <u>serie</u> <u>utile</u> per i <u>confronti</u>:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{convrege} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \quad \text{converge sse} \begin{cases} \alpha > 1, \forall \beta \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$$

<u>es.</u> $\sum \frac{1}{n^4 \sqrt{\log n}}$ conv.

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^{1000}} \quad \text{no!}$$

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^2} \quad \text{conv.}$$

<u>Es.</u> $\sum \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+5}\,\log(n+1)}}_{a_n}$

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n)} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

Es. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^5(\log^2 n + \log n + 1)}$

$\log^2 n \left(1 + \frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log^2 n}\right)$

$a_n \geq 0$

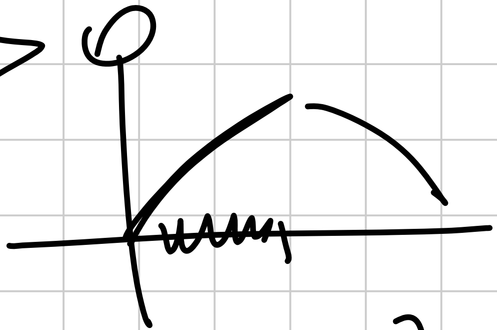
$a_n \sim \dfrac{1}{n^5 \log^2 n}$

$\displaystyle\sum \frac{1}{n^5 \log^2 n}$ converge.

$$\sum (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{2n}}{3^n}$$,

dire per quali $x \in \mathbb{R}$ conv. assolut. e per quali conv.

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) > 0$



$$|a_n| = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \frac{(x^2)^n}{3^n} \sim \frac{1}{n} \frac{(x^2)^n}{3^n}$$

$\operatorname{sen} x \sim x$
$x \to 0$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\operatorname{sen} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ $n \to +\infty$

sen n

$$\sum \frac{1}{n} \frac{(x^2)^n}{3^n}$$ criterio radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{x^2}{3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x^2}{3} < 1$$

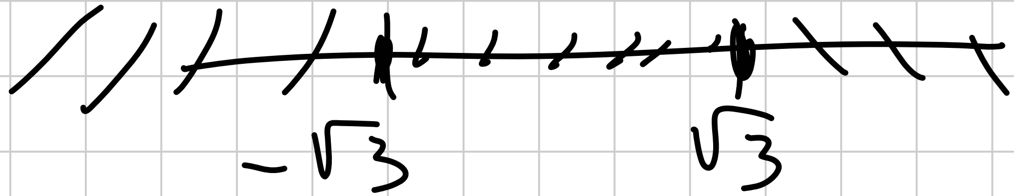
$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x} \log x} = 1$$

$$\frac{1}{x} \log x \to 0$$

se $\frac{x^2}{3} < 1$ la serie converge assolutamente

$|x| < \sqrt{3}$ la serie conv- assolutamente



Prendo $|x| > \sqrt{3}$

$\frac{x^2}{3} > 1$

$$\sum (-1)^n \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n}$$

$a_n \not\to 0$ $\quad$ $a_n \to +\infty$

non converge

$|x| = \sqrt{3}$ $\quad$ $x^2 = 3$ $\quad$ $\sum (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

1) $\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ decrescente

2) $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

conv.
ma non
assolutamente

$$\sum (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$|a_n| = \operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

non conv.
<u>assolutamente</u>

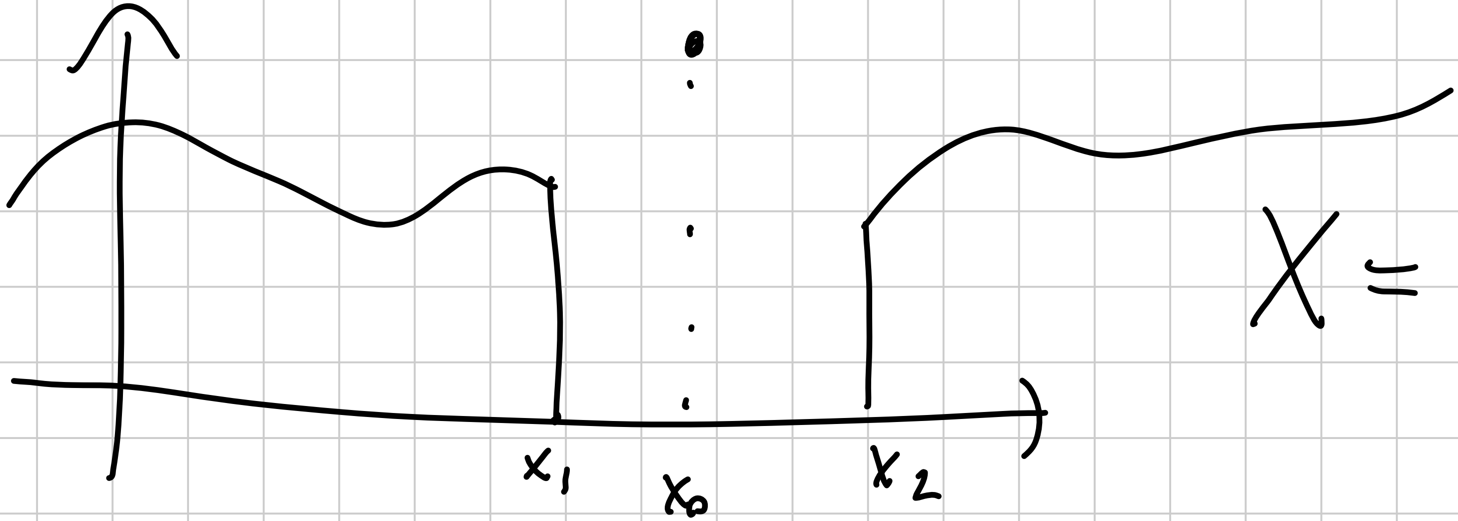
Funzioni continue

Def. $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

- se x_0 p.to isolato $\Rightarrow$ f è continua in x_0

- se x_0 p.to di accumulazione f si dice <u>continua</u> in <u>x_0</u> se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

x_0 p.to isolato per X $\Leftrightarrow$ $x_0 \in X$, x_0 <u>non</u> è di accumulazione



$$X = (-\infty, x_1] \cup \{x_0\} \cup [x_2, +\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, a_n \to x_0 \qquad \lim_n f(a_n) = f(x_0)$$

es.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0$$

sen x è continua in $x = 0$

es. $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$ $\quad e^x$ monotone

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

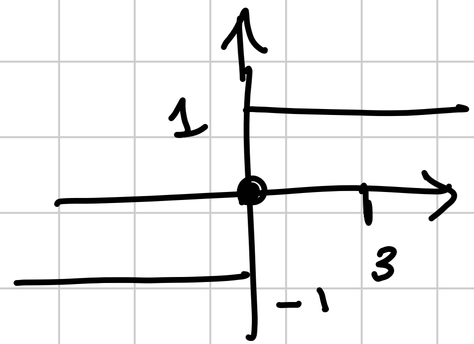
Def.

f è continua in x_0 da destra se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

" " da sinistra se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

f è continua in $x_0 \iff f$ è continua da dx e da sx.

es. $f(x) = \operatorname{sgn} x \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



è continua in $x = 0$?

$f(0) = 0$ non è continua in $x = 0$

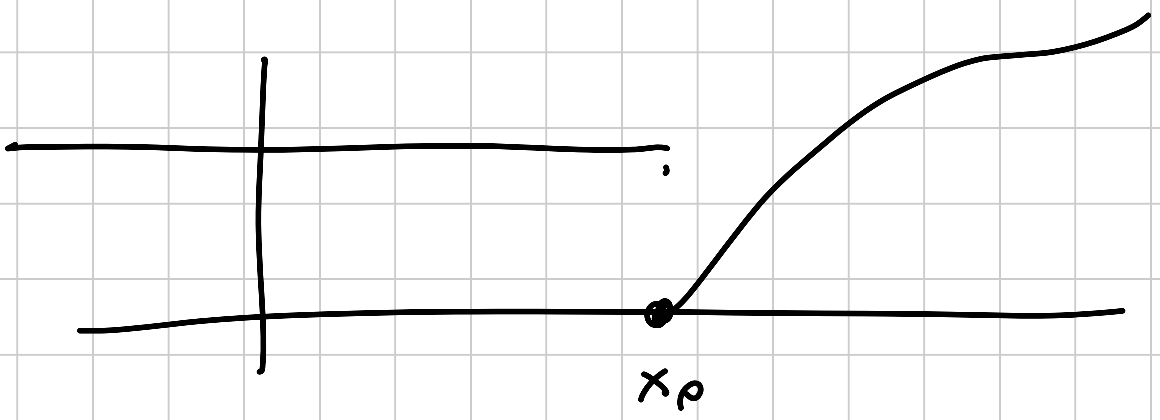
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq 0$

$x = 3$ f è continua in $x = 3$?

$f(3) = 1$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 1 = f(3)$

f è continua $\forall\, x_0 \neq 0$.



$f(x_0) = 0$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ f continua da dx in x_0

__Proprietà__ f, g sono continue in x_0

$f+g$, $f \cdot g$, cf, $\frac{1}{g}$ $(g \neq 0)$,

$|f|$ sono funzioni continue in x_0.

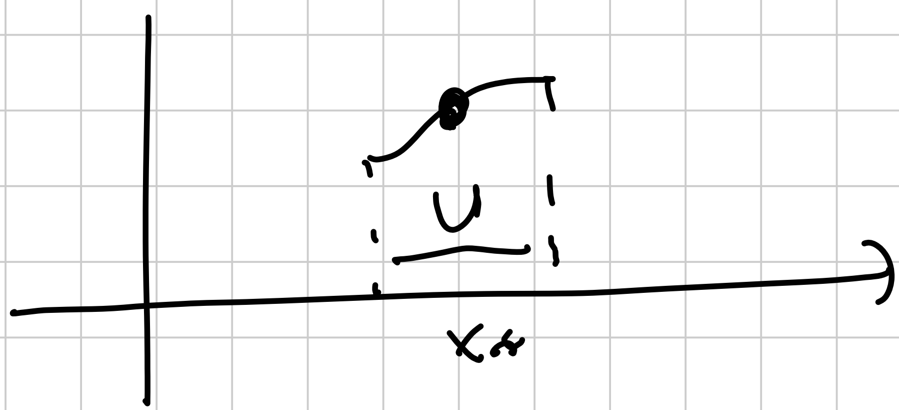
__Def.__ f è continua in X se è continua in ogni $x_0 \in X$.

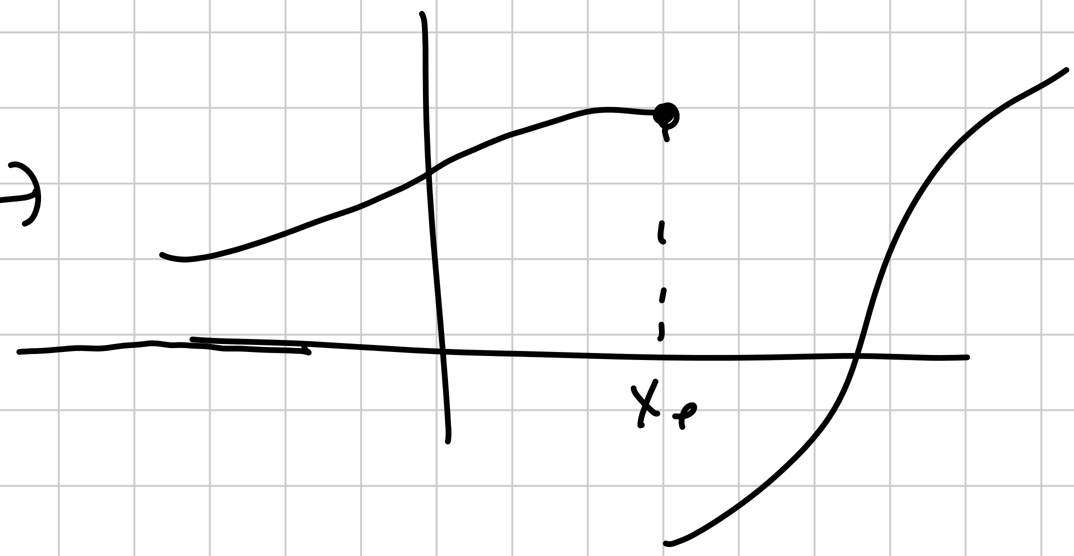
__Proprietà__ f, g continue $\Rightarrow$ $f \circ g$, $g \circ f$ è continua

g è continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ è continua x_0

Teo. __permanenza del segno__

f continua in x_0, $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, U$ intorno di x_0 in cui $f(x) > 0$, $\forall x \in U$.





Dal teorema del limite delle funzioni monotone

tutte le funzioni elementari sono continue dove sono definite.

$\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,

e^x, a^x,

x^α

$\log x$

$$f(x) = 3^{\sqrt{x^2+\log x}} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x^2-1} + e^x\right)$$

$x \in X$ (dominio) $\Rightarrow$ f è continua in x

Punti di discontinuità

f non è continua in x_0

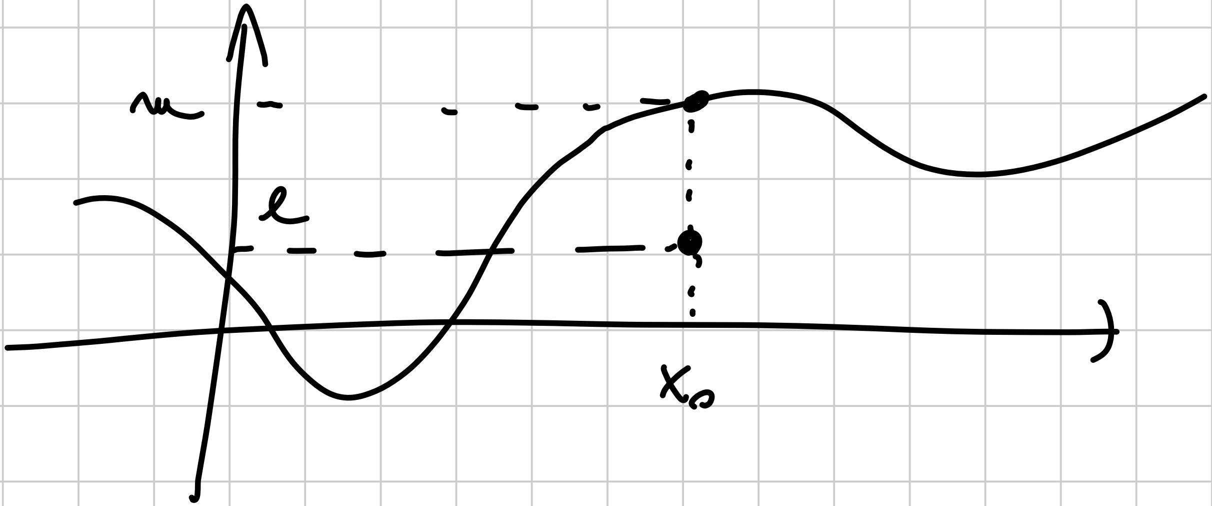
1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ finito $\neq f(x_0) \Rightarrow$ f ha una discontinuità eliminabile

$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\exists$ finiti $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ ma sono diversi

f discontinuità di salto, 1ª specie

f ha una discontinuità di 2ª specie



$f(x_0) = l$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = m \neq l$
$\neq f(x_0)$

f ha una discontinuità eliminabile in x_0

es.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

dominio $x \in \mathbb{R}$

$x \neq 0$ $\quad f$ continua

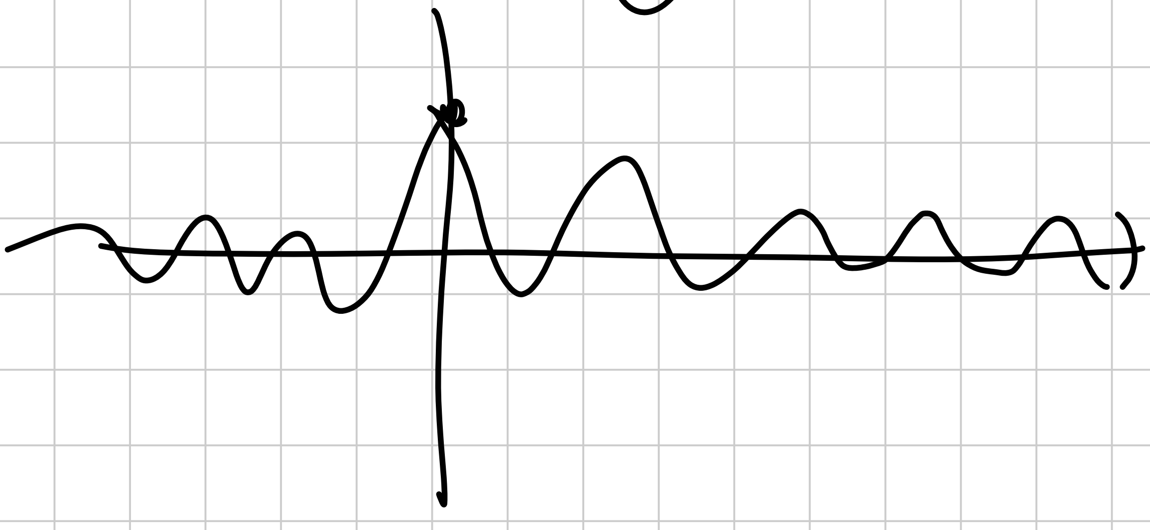
$x = 0$

$f(0) = 5$

? $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$?

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 5$ eliminabile

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

non è definita in $x = 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \forall\ x \neq 0$

dove è definita è continua

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 27 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

discontinuità di 2ª specie per $f(x)$

$f(x) = \operatorname{sgn} x$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

discontinuità di salto.

<u>ES.</u> $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \forall x_0$

f che non è continua in nessun punto!