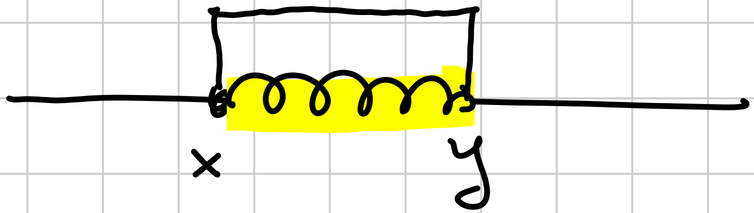
Limiti di funzioni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$

$x \to x_0$

Topologia in $\mathbb{R}$

(in $\mathbb{R}^2$, .. in $\mathbb{R}^n$)



$x, y \in \mathbb{R}$

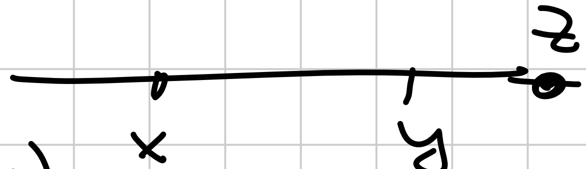
distanza euclidea $= |x - y|$

$d(x, y)$ **distanza**

$d(x,y)$ = distanza di x da y

$$d(x,y) : \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}^{X} \to \mathbb{R}$$

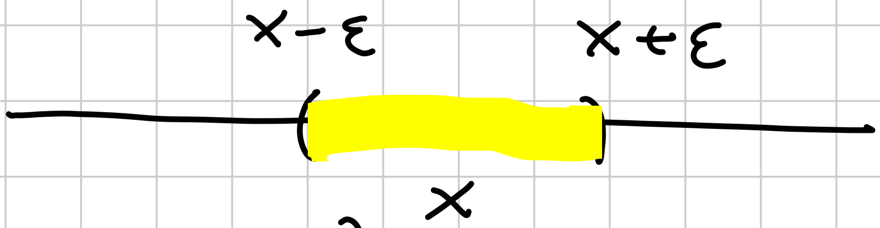
$$\begin{cases} \cdot\ d(x,y) \geq 0 \qquad d(x,y)=0 \iff x=y \\ \cdot\ d(x,y) = d(y,x) \\ \cdot\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{cases}$$



disuguaglianza triangolare

$$\boxed{d(x,y) = |x-y|}$$

Intorni di $x \in \mathbb{R}$



Def $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

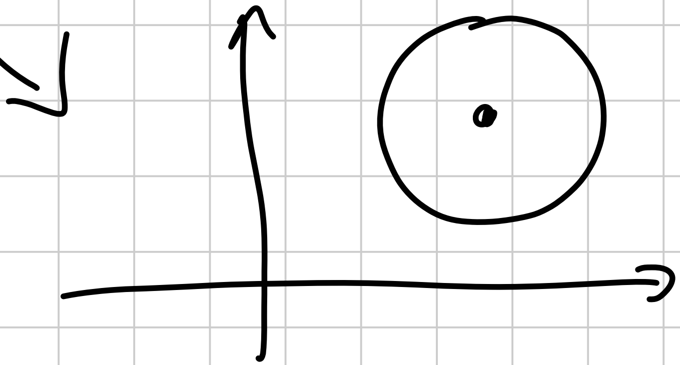
$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon \} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

intorno di x.

$$|y - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < y - x < \varepsilon$$

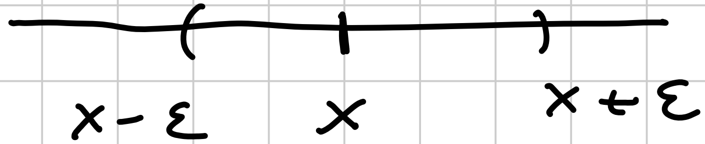
$$\Downarrow$$

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$$



$\mathcal{U}$ = intorno di x

Intorno di $x \in \mathbb{R} = \mathcal{U} = B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$



Ampliamento di $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} =: \mathbb{R}^*$$ retta ampliata

$$\mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$$

Attenzione $-\infty$ e $+\infty$ **non** sono numeri

Definisco gli intorni in $\mathbb{R}^*$.

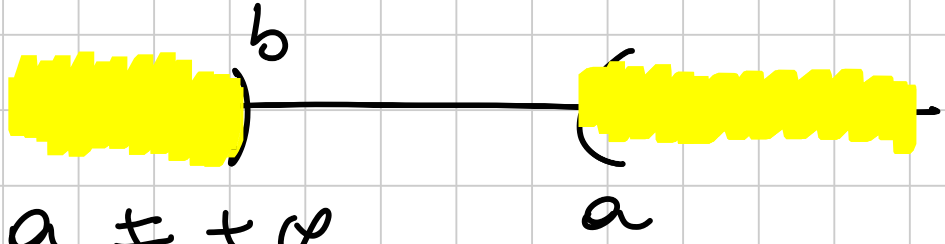
$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

$x \in \mathbb{R}$

$x = +\infty$

$x = -\infty$

<u>Def.</u> Intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $U = (a, +\infty]$, $a \neq +\infty$



$$x \in (a, +\infty] \Longleftrightarrow x > a$$

<u>Def.</u> Intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo $U = [-\infty, b)$, $b \neq -\infty$

$\mathbb{R}^*$

$\boxed{x \in \mathbb{R}^* \qquad \mathcal{U} \text{ intorno di } x}$

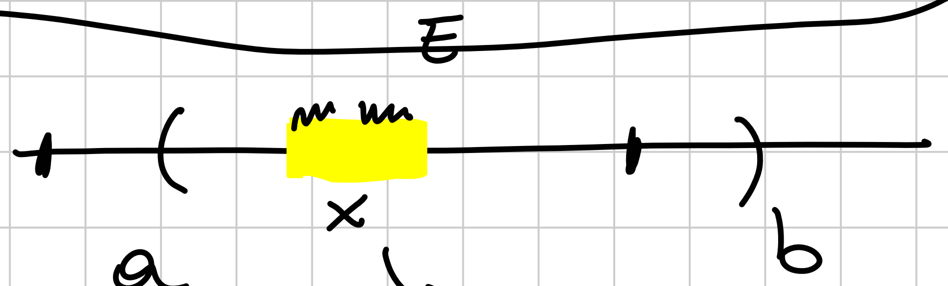
$x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x = +\infty$ $\qquad$ $x = -\infty$

$\mathcal{U} = (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ $\qquad$ $\mathcal{U} = (a, +\infty]$ $\qquad$ $\mathcal{U} = [-\infty, b)$

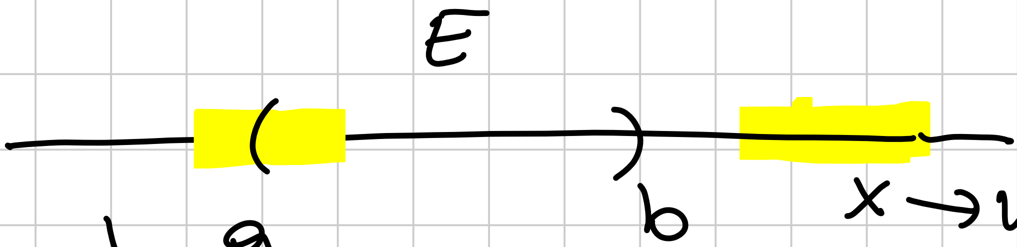
Def. $E \subset \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$ si dice di **ACCUMULAZIONE per E** se ogni intorno di x contiene un punto di E diverso da x

$$\left(\forall\, \mathcal{U} \text{ di } x \ \exists\, y \neq x : \ y \in \mathcal{U} \cap E\right)$$

Es. $E = (a,b)$



$\to$ è di accumulazione per E



$x \to$ no! non è di accumulazione

sì! è di accumulazione

$E = (a, b)$ tutti i p.ti di accumulazione per E sono tutti i punti di E e $x = a$ e $x = b$
$\notin E$ $\notin E$

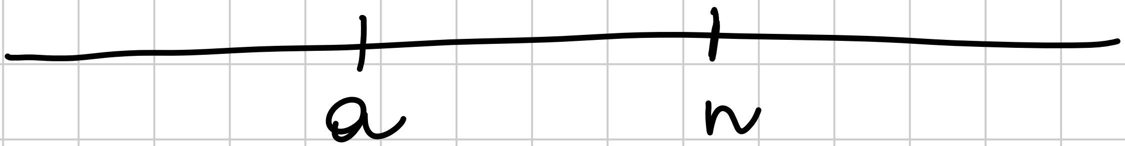
Es. $\mathbb{N} = E$ $\quad +\infty \in \mathbb{R}^*$ è di accumulazione per $\mathbb{N}$

voglio dim.

$\forall \mathcal{U}$ intorno di $+\infty$ $\exists\, y \in \mathbb{N} \cap \mathcal{U}$

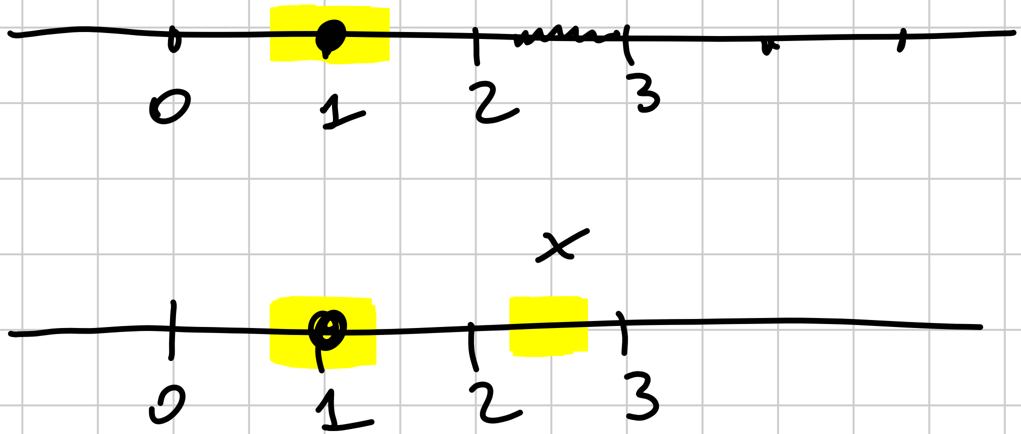
$\mathcal{U} = (a, +\infty]$

$\forall a \quad \exists\, n \in \mathcal{U} \quad (n > a)$



$E = \mathbb{N}$ $\quad +\infty$ è di accumulazione per $\mathbb{N}$ ed è l'unico!

Ce ne sono altri?



$\exists\, y \notin X$

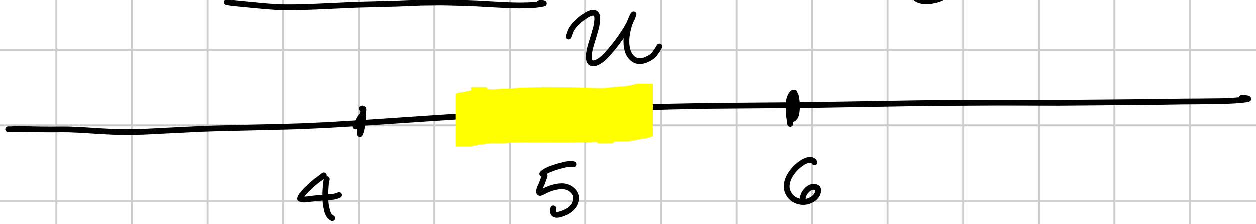
$x \in (2,3)$

Gli elementi di $\mathbb{N}$ sono punti <u>ISOLATI</u>

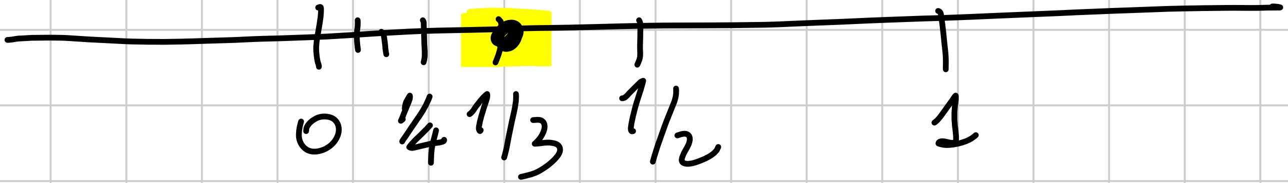
__Def.__ $E \subset \mathbb{R}^*$, $x \in E$ è __isolato__ se __non__ è di accumulazione per E

($x \in E$ è __isolato__ se $\exists\ \mathcal{U}$ di x t.c. $E \cap \mathcal{U} = \{x\}$)

__Es.__ Tutti i numeri naturali sono p.ti __isolati__ $E = \mathbb{N}$

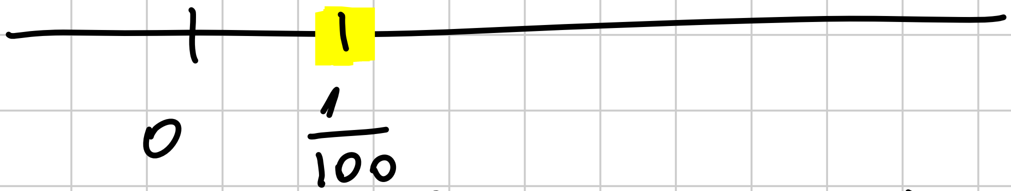


Es. $E = \left\{ x = \frac{1}{n} ,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$



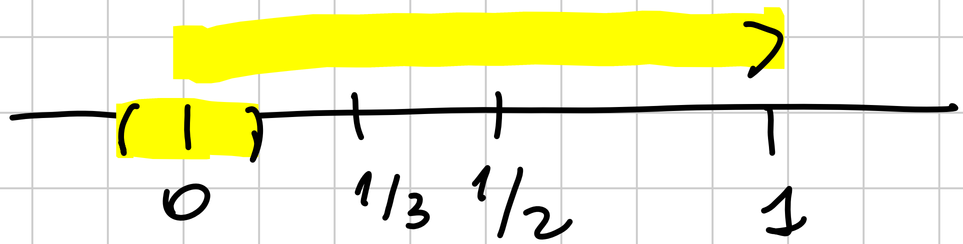
- $\forall x \in E$ $\quad x$ è <u>isolato</u>

$\exists\, U$ di x che interseca E solo in x



- 0 è di <u>accumulazione</u> per E

$E = \{ x = \frac{1}{n} \}$



- 0 è di accumulazione per E

$\forall\, U$ di x $\quad \exists\, y \neq x \;:\; y \in U \cap E$

$0 \qquad U = (-\varepsilon, \varepsilon)$ intorno di 0

1 $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \neq 0 \;:\; y \in U \cap E$ $(1/n)$

$y \in E \qquad \frac{1}{n}$

2 $\exists\, n \;:\;$ 3 $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n > 1/\varepsilon}$

ho trovato $\underline{\underline{n}}$

OSS. E finito (= con un numero finito di elementi)

$E = \left\{ x = \frac{1}{n} \right\}$ è infinito e limitato

se E è finito non ci sono p.ti di accumulazione per E

Teorema di Bolzano-Weierstrass

(solo enunciato)

$E \subseteq \mathbb{R}$ limitato e infinito (cioè con infiniti elementi). Allora esiste $x \in \mathbb{R}$ che è di accumulazione per E.

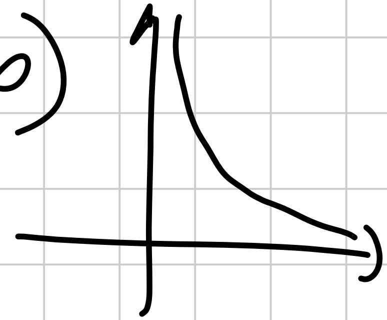
$$E = \left\{ x = \frac{1}{n} \right\}$$

limitato
infinito

0 è di accumul.

Def. $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X in $\mathbb{R}^*$. Si dice che $f(x)$ ha una certa proprietà $\mathcal{P}$ definitivamente per $x \to x_0$ se $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0 t.c. $f(x)$ ha la proprietà $\mathcal{P}$, $x \in \mathcal{U} \cap X$, $x \neq x_0$

Es. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad X = (0, +\infty)$



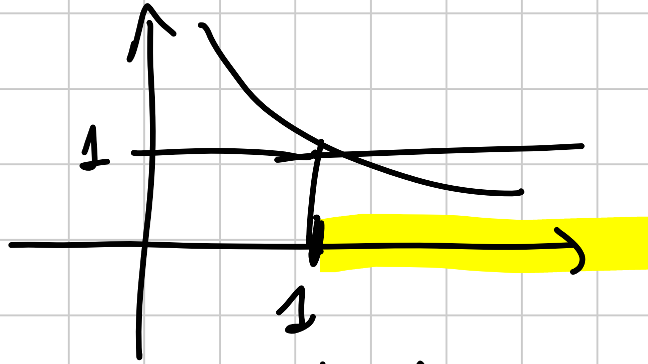
non è limitata in $(0, +\infty)$

$\sup f = +\infty$

ma $f(x)$ è limitata definitivamente per $x \to +\infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$

è definitivamente limitata per $x \to +\infty$



$\mathcal{S}$ = essere limitata

$x_0 = +\infty$

$\exists\ U$ di $+\infty$ t.c. $f(x)$ è limitata

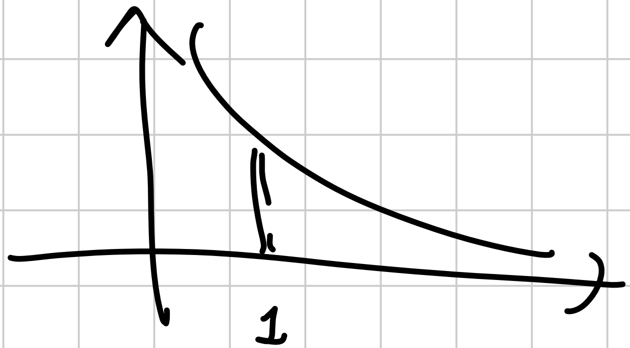
$\forall\ x \in U$

$\mathcal{U} = (1, +\infty]$ $\qquad x > 1 \qquad f(x) = \frac{1}{x} < 1$

$\forall\ x \in \mathcal{U} \qquad f(x) < 1$ cioè limitata

$f(x)$ ha la proprietà $\mathcal{P}$ definitivamente per $x \to \underbrace{+\infty}_{x_0}$

? $\exists\, \mathcal{U}$ di $+\infty$ t.c. $\forall x \in \mathcal{U}$, $f(x)$?
ha la proprietà $\mathcal{P}$.



$\mathcal{U} = (1, +\infty]$

$\forall x \in \mathcal{U} \iff x > 1$

$\forall x > 1$ devo dim. che $f(x)$ è limitata

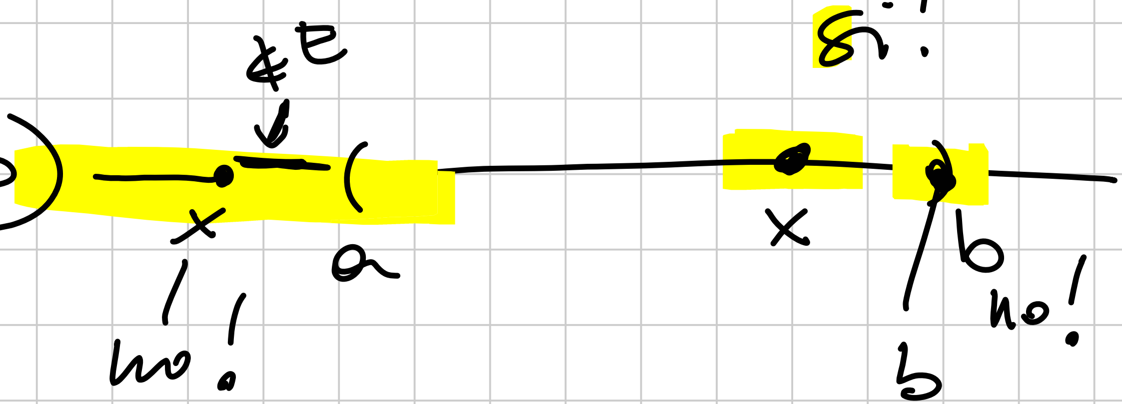
$f(x) = \dfrac{1}{x} < 1 \quad \forall x > 1$

Insiemi aperti e chiusi

$E \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad CE = \mathbb{R}\setminus E$ complementare di E.

Def. $x \in \mathbb{R}$ è **INTERNO** a E se esiste un intorno di x tutto contenuto in E.

Es. $E = (a, b)$



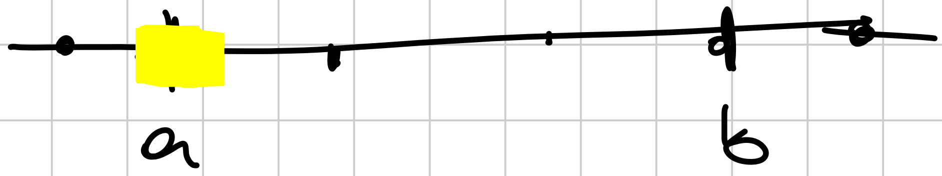
Quali sono i punti interni di E?

sono tutti e soli i punti di E.

Dico che E è **APERTO**

Def. $E \subseteq \mathbb{R}$ è **APERTO** se ogni suo elemento è un p.to interno di E.

Es. $E = [a,b]$

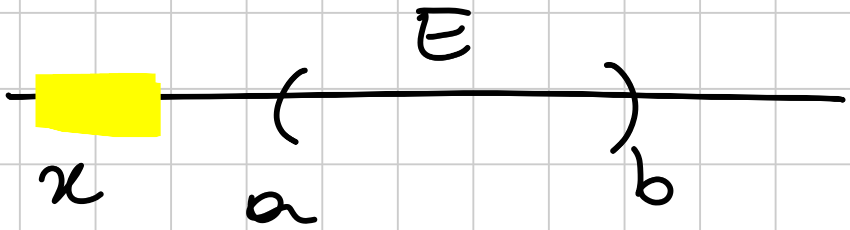


$x \in (a,b)$ sono p.ti interni di E.

$a \in E$ **non** è **interno**!

$[a,b]$ **non** è APERTO (a e b non sono p.ti interni).

Def Un punto si dice **ESTERNO** a E se è interno al CE

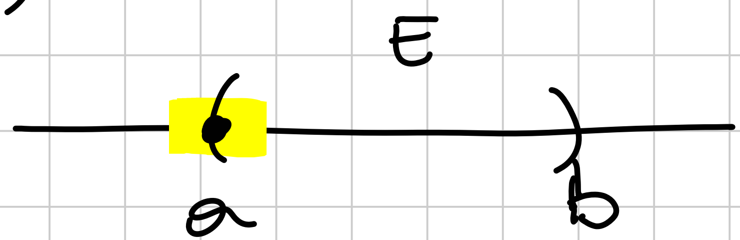


$x < a$

x è esterno

$$CE = \mathbb{R} \setminus E = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

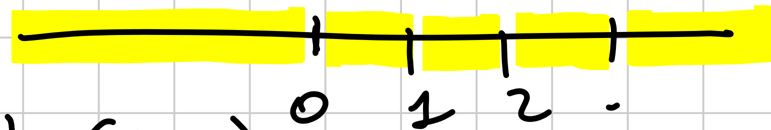
Def. Un punto si dice di **FRONTIERA** per E se non è né interno, né esterno.



a non è né interno
né esterno
è di frontiera per E

Def. $E \subseteq \mathbb{R}$ è <u>CHIUSO</u> se $\complement E$ è <u>aperto</u>.

Es. $\mathbb{N}$ è chiuso



$\complement \mathbb{N} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots$

$\Downarrow$ è <u>aperto</u>! (ogni p.to è interno a $\complement \mathbb{N}$)

Per def. $\emptyset$ è <u>aperto</u>

$\complement \emptyset = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}$ è chiuso $\qquad$ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Per def. $\emptyset$ è aperto

$C\emptyset = \mathbb{R}$ è chiuso

$\mathbb{R}$ però è anche aperto

$C\mathbb{R} = \emptyset$ è anche chiuso

$\mathbb{R}$, $\emptyset$ sono insiemi sia aperti che chiusi (e sono gli unici).

Oss. A, B aperti (chiusi)

$A \cup B$ è aperto (chiuso)

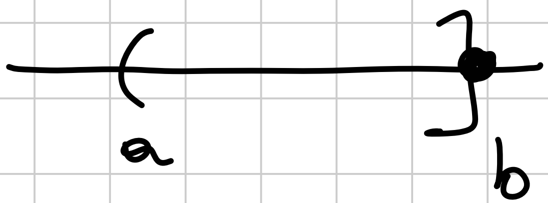
$A \cap B$ " " (")

$E = (a, b)$ è aperto

$E = [a, b]$ è **chiuso**

$\complement E = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ è aperto

$E = (a, b]$ né aperto, né chiuso.

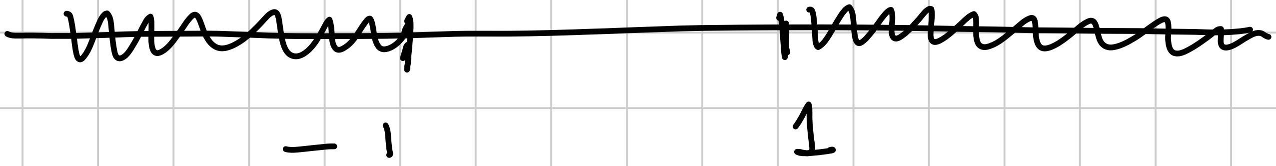


P.C. b non è interno

e $\complement E$ non è aperto.

DISEQUAZIONI

Es. $\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{a} > \overset{b}{\frac{x}{2}}$



$x^2-1 \geq 0$

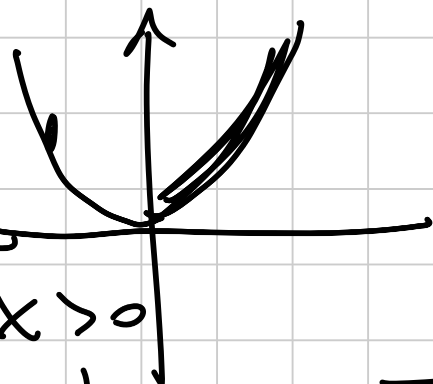
$x^2 \geq 1$

$|x| \geq 1$

$x \geq 1$ e $x \leq -1$

oss. $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$ sì se $a, b > 0$

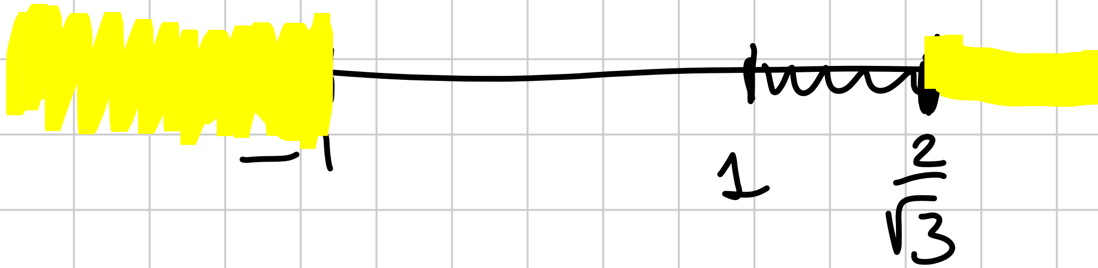
$f(x) = x^2$



è crescente solo se $x > 0$

se $a \geq b$ e $a, b < 0 \Rightarrow a^2 \leq b^2$

$$\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{a} > \underbrace{\frac{x}{2}}_{b}$$



1) $\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow x < 0$ la disequazione è sempre verificata

2) $\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow x > 0$

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 > \frac{x^2}{4} \qquad x^2 - 1 > \frac{x^2}{4} \qquad \frac{3}{4}x^2 > 1$$

$$x^2 > \frac{4}{3} \qquad |x| > \frac{2}{\sqrt{3}} \xRightarrow[x>0]{} x > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

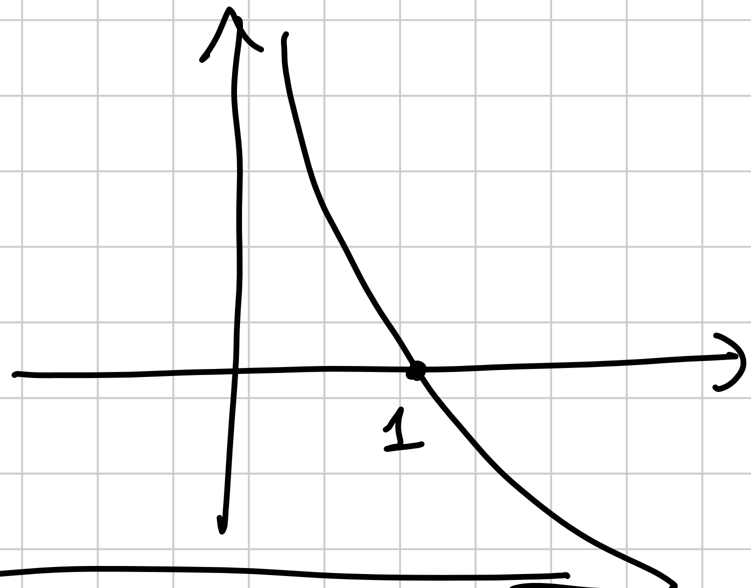
$$(-\infty, -1] \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$

Trovare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\log_{1/3}(x^2 - x - 1)}$$

$$\log_a x \iff x > 0$$

$$x^2 - x - 1 > 0$$



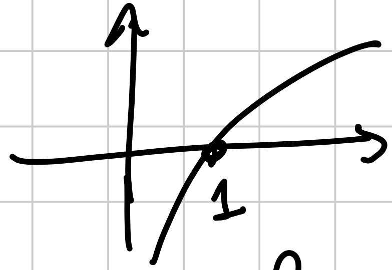
$$\log_{1/3}(x^2 - x - 1) \geq 0$$

$$x^2 - x - 1 \leq 1$$

$$\boxed{0 < x^2 - x - 1 \leq 1}$$

finire .....

$$\log\left(e^{2x} - 4e^{x} + 4\right) > 0$$



$\log_e$ = logaritmo naturale = log = ln

e = numero di Nepero.

$$e^{2x} - 4e^{x} + 4 > 1$$

$$e^{2x} - 4e^{x} + 3 > 0 \qquad e^{x} = y$$

$$y^2 - 4y + 3 > 0$$

$$y = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$e^{x} > 3 \qquad e^{x} < 1$$

$$x > \log 3$$

$$x < 0$$

Dominio di

$$f(x) = \arccos \left| x^3 - \frac{1}{2} \right|$$

$$\left| x^3 - \frac{1}{2} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq x^3 - \frac{1}{2} \leq 1$$

$$-1/2 \leq x^3 \leq \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[3]{-1/2} \leq x \leq \sqrt[3]{3/2}$$

$$\parallel$$

$$-\sqrt[3]{1/2}$$

es.: PC.

Tracciare il grafico di

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\neq x$$

$$\arcsin(\sin 100) \neq 100$$

$$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$