DERIVATE

I = intervallo

Def $f: I \to \mathbb{R}$. La f si dice **DERIVABILE** in $x_0 \in I$ se esiste finito

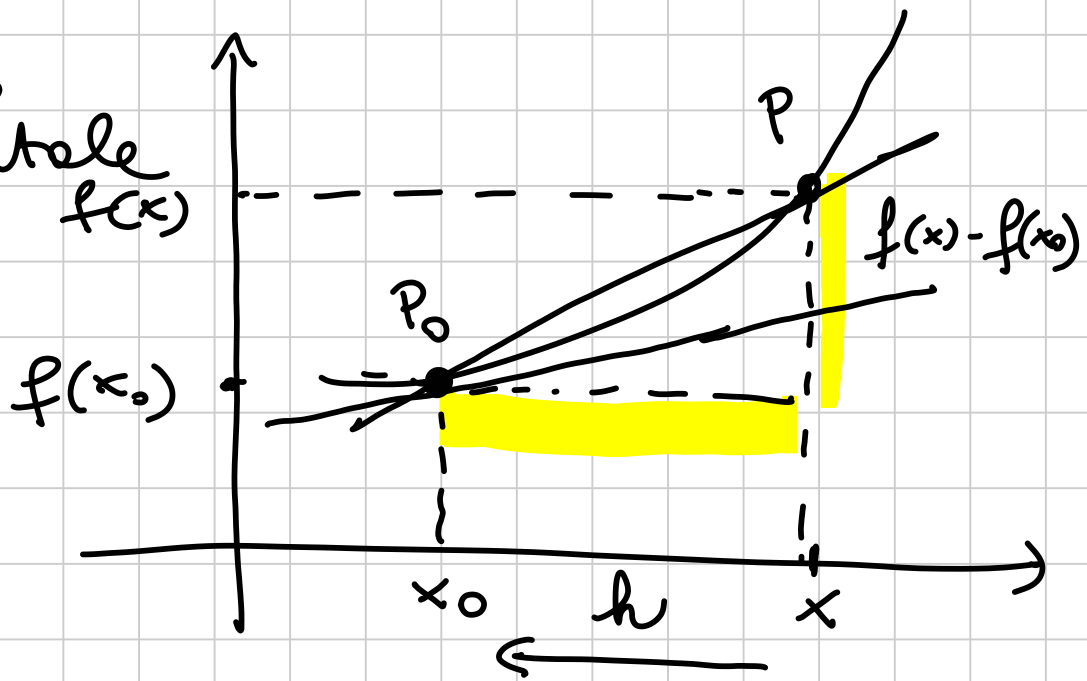
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

"derivata" di f in x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{rapporto incrementale}$$

$x = x_0 + h$

h incremento



$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

2° modo per scrivere il rapporto incrementale

è il tasso di variazione media di f tra x_0 e x_0+h

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$$

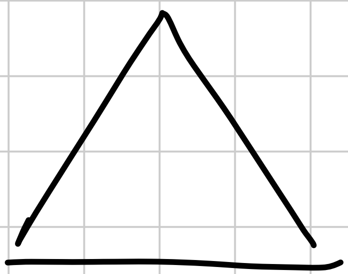
Geometricamente $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ è la pendenza della retta secante passante per P e P_0

Presa una funzione f

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ variazione media

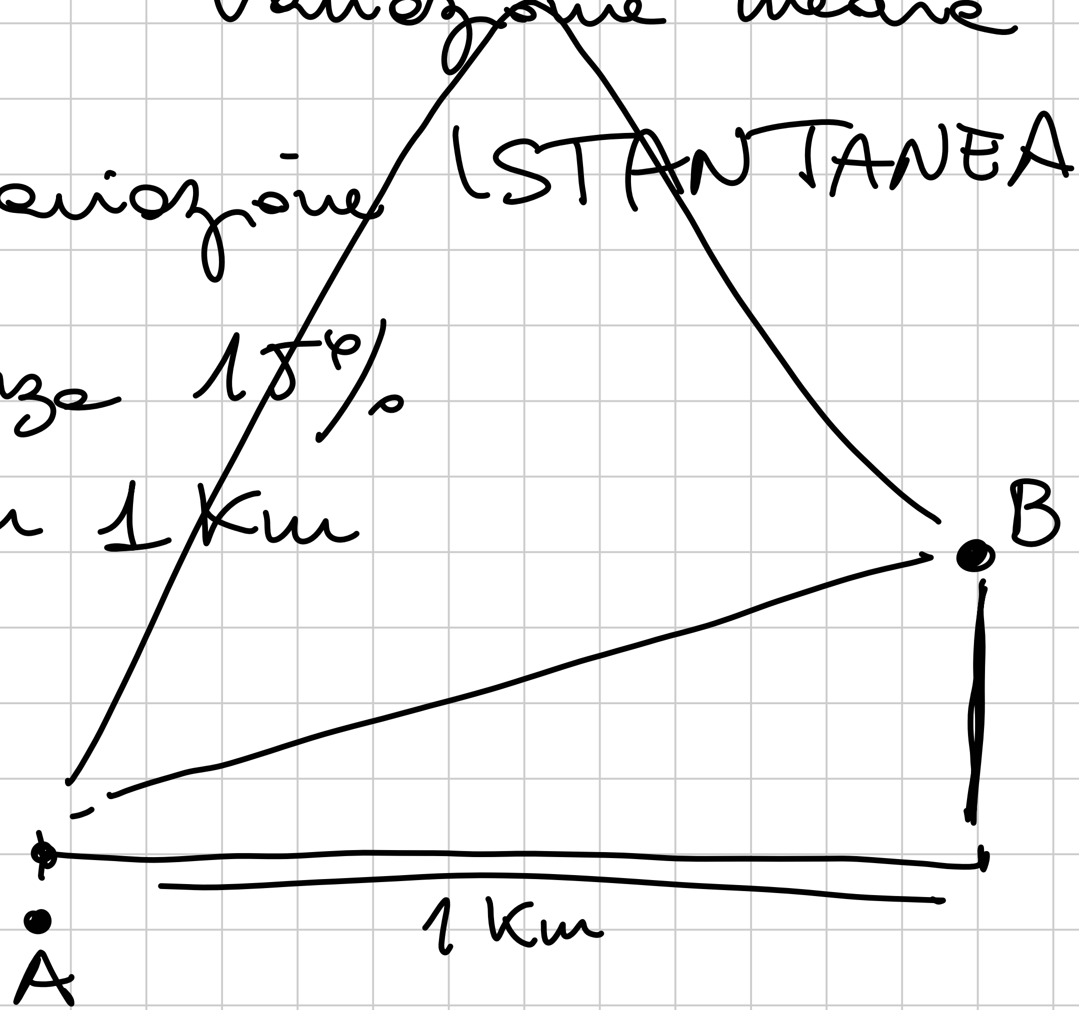
mi interessa la variazione ISTANTANEA

ES.



pendenza 15%

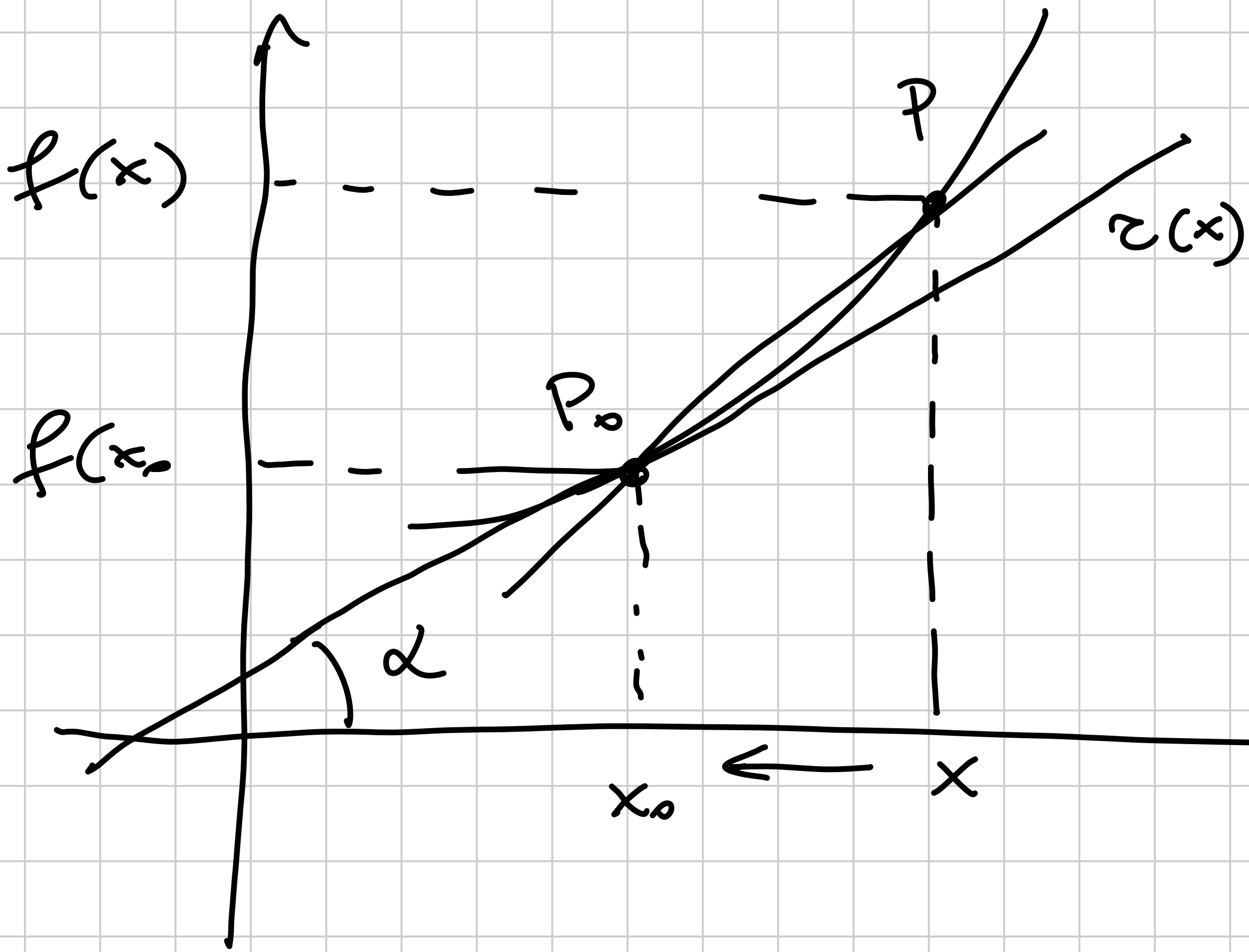
per 1 Km



Si può dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m = \text{coeff. angolare}$$

della retta tangente al grafico di f in P_0



eq. retta tangente in P_0

passa per $(x_0, f(x_0))$

$$m = f'(x_0)$$

$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) =: r(x)$$

retta tangente al grafico di f passante per $P_0 = (x_0, f(x_0))$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

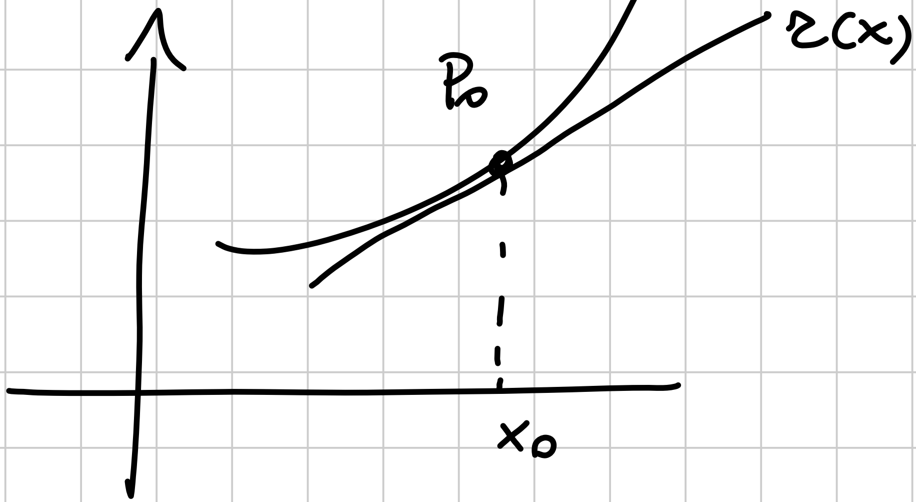
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0}$$

$$f(x) = \underbrace{r(x)}_{\text{tangente in } P_0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\to 0 \ \ x \to x_0} \quad x \to x_0$$



Fra tutte le rette passanti per P_0 quella che "meglio approssima" f vicino a P_0 è la retta tangente in P_0, $r(x)$.

Riassunto

- $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

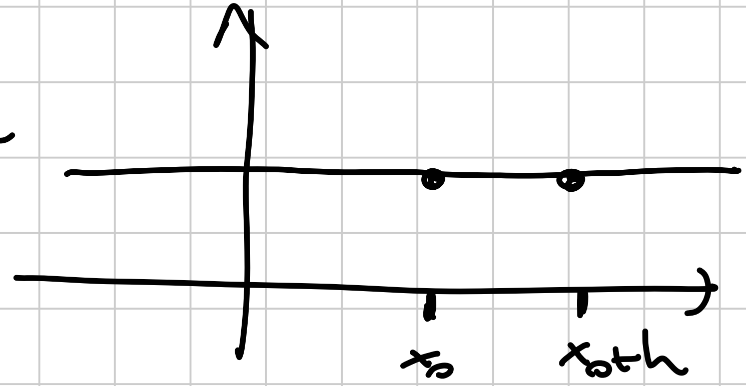
- $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)_{x \to x_0}$$

Altre notazioni per indicare la derivata di una funzione f in un p.to x_0

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad Df(x_0)$$

Derivate di alcune funzioni elementari.

Es. $f(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R}$



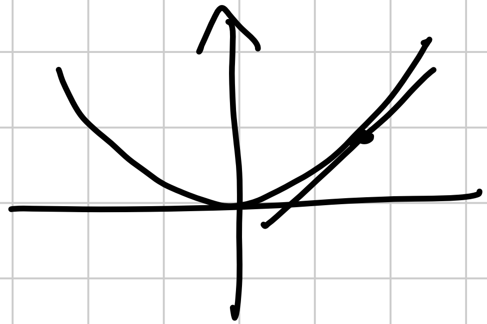
x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$$

Derivata delle potenze



$$f(x) = x^2$$

x_0 $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + h^2 + 2x_0 h - \cancel{x_0^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2x_0) = 2x_0$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

Es. Calcolo la derivata di $f(x) = x^2$ in $x = 5$

$$f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

$$f'(-3) = -6$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

In generale

$$f(x) = x^n$$

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{\cancel{x_0^n} + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \dots \binom{n}{n} h^n - \cancel{x_0^n}}{h} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} + (\quad) h +$$

$$+ \dots \binom{n}{n} h^{n-1}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = n x_0^{n-1} = f'(x_0)$$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f(x) = x^{27} \qquad f'(x) = 27 x^{26}$$

$$x = 1 \qquad f'(1) = 27$$

$$f(x) = e^{x}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$= e^{x_0} \underbrace{\frac{(e^{h} - 1)}{h}}_{\to 1} \xrightarrow[h \to 0]{} e^{x_0}$$

$$f(x) = e^{x} \implies f'(x) = e^{x} \quad \forall x$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x_0+h) - \operatorname{sen} x_0}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}_{\to 1} \cos\Big(\underbrace{x_0 + \frac{h}{2}}_{\to x_0}\Big) \xrightarrow[h \to 0]{} \underline{\cos x_0}$$

$$\left(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

Analog.

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \log x$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h} =$$

$$= \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}\, x_0} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x_0}$$

$$\underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}}_{h\to 0} \to 1$$

$$\frac{\log(1+y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$$

$$f(x) = \log x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

Teo. $f : I \to \mathbb{R}$ **derivabile** in x_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f è **continua** in x_0.

Dim. Se f è derivabile in x_0

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}}\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\to 0}$$

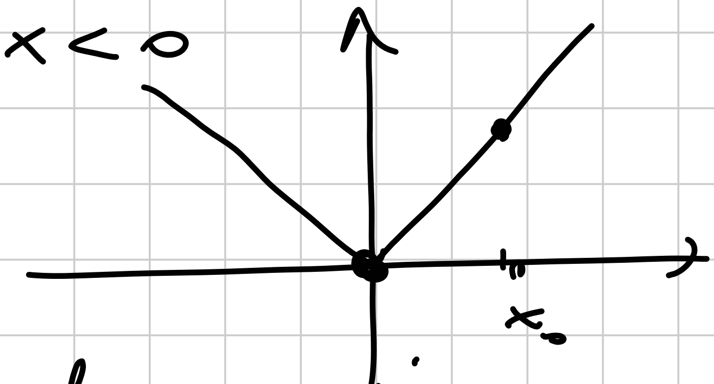
$x \to x_0$ $\qquad\qquad$ $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ è continua}$$

__OSS.__ Non vale il viceversa

f è continua in x_0 $\not\Longrightarrow$ f derivabile in x_0.

__Es.__ $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



$x_0 \neq 0$

$x_0 = 0$ $\qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(0)$

f è continua

è __derivabile__ in $x_0 = 0$?

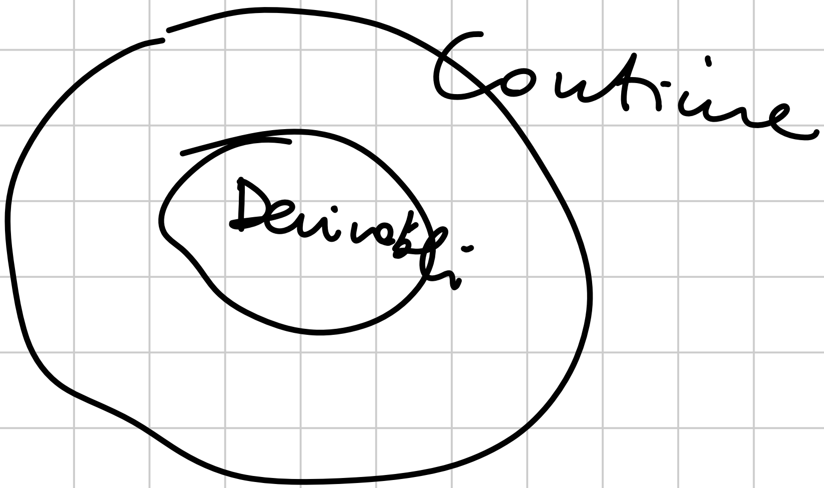
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

se $h \to 0$ $\qquad h \to 0^+$ $\qquad \frac{h}{h} \to 1$

$$h \to 0^- \qquad -\frac{h}{h} = -1 \to -1$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$f(x) = |x|$ <u>non</u> è derivabile in $x = 0$



Def. f è derivabile in I intervallo se è derivabile $\forall x \in I$.

Es. $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x$ è derivabile in $\mathbb{R}$

↓ funzione di x

$f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ funzione continua su $\mathbb{R}$ con derivata continua su $\mathbb{R}$

$f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ (o $C(\mathbb{R})$) funzione continua su $\mathbb{R}$

__es.__ $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

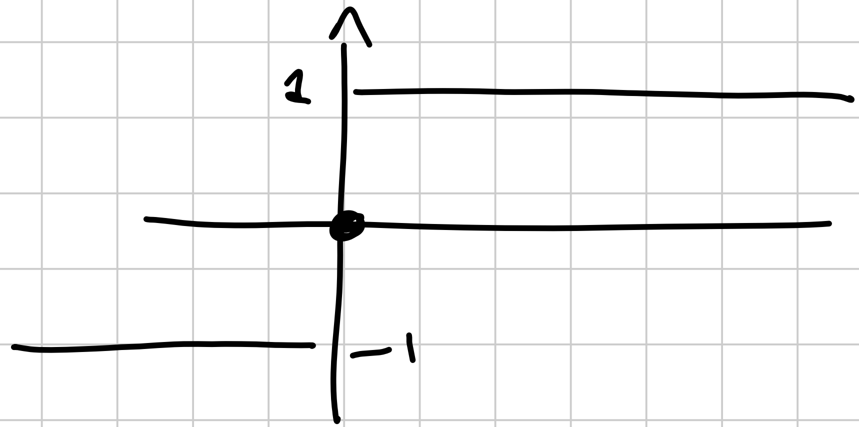
$f \in C^1(\mathbb{R})$

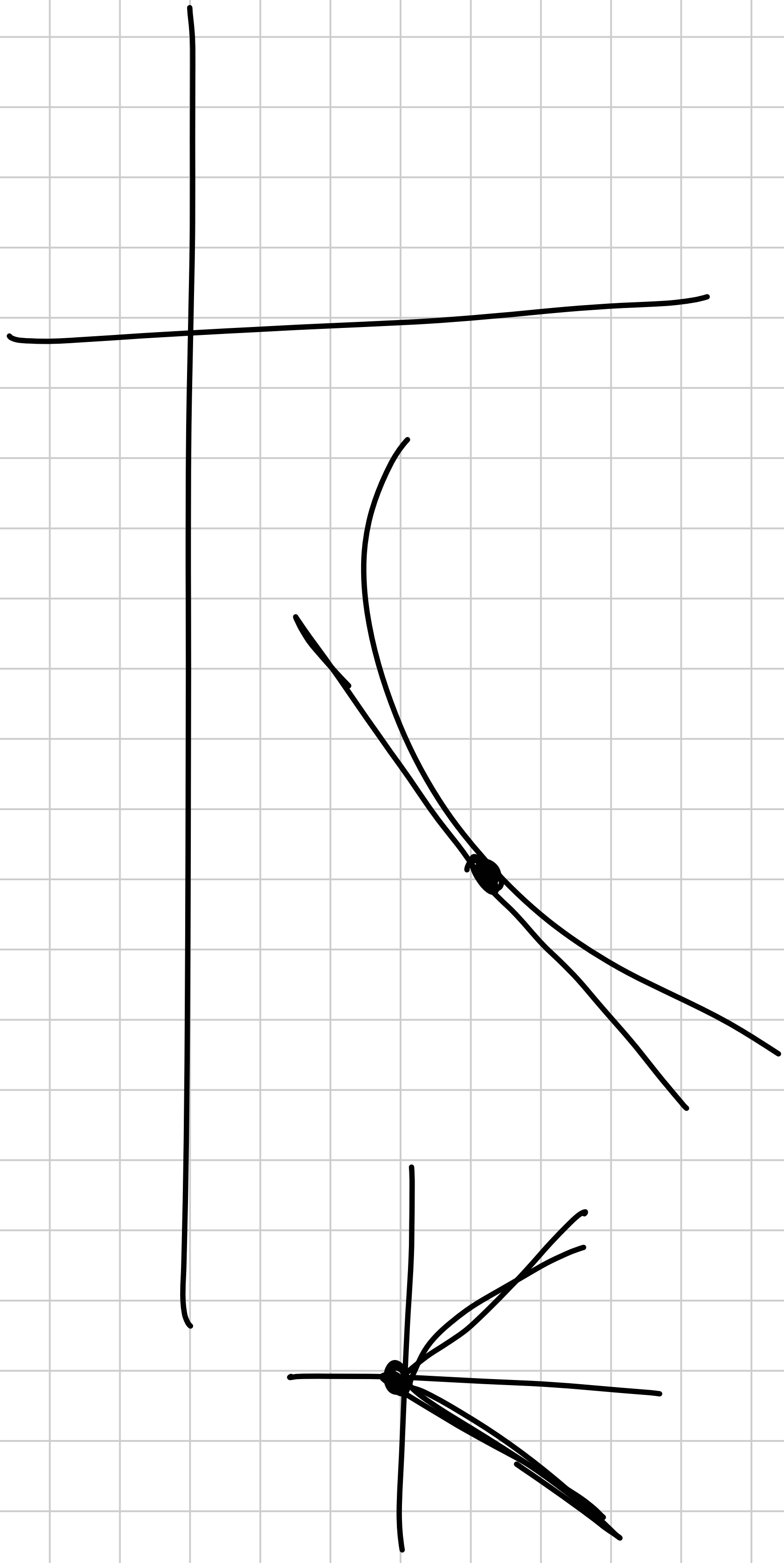
__OSS.__ Se f __non__ è continua in x_0

$\Rightarrow$ f __non__ è derivabile in x_0

$f(x) = \operatorname{sgn} x$

f __non__ è continua in $x = 0$





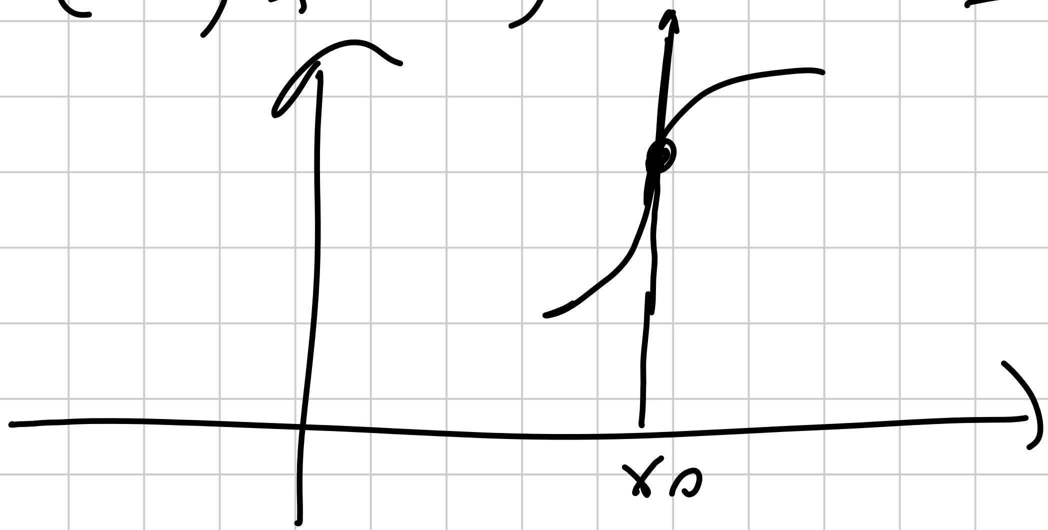
<u>Notazione</u>

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (-\infty)$$

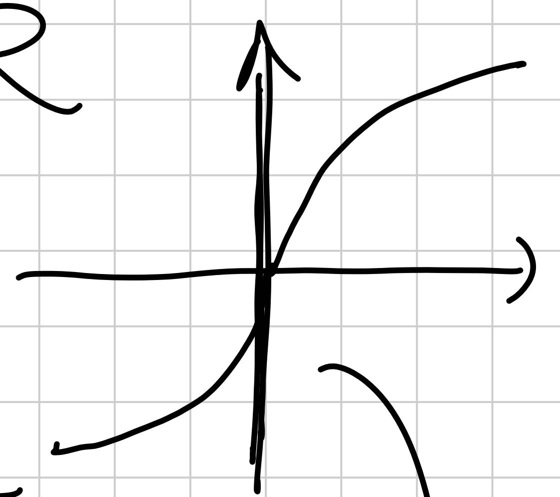
<u>non</u> è derivabile in x_0

$$f'(x_0) = +\infty \quad (-\infty)$$

$(x_0, f(x_0))$ è a <u>tangente verticale</u>



Es. $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$f(x) \in C^0(\mathbb{R})$

è derivabile in $x_0 = 0$?

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$$

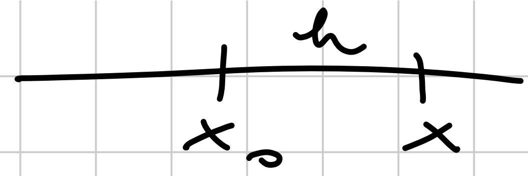
$h \to 0$

non è derivabile in x_0

$(f'(0) = +\infty)$

retta tg. al grafico in $x=0$

Derivate dx e sx



$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'_+(x_0) \quad \text{(destra)}$$

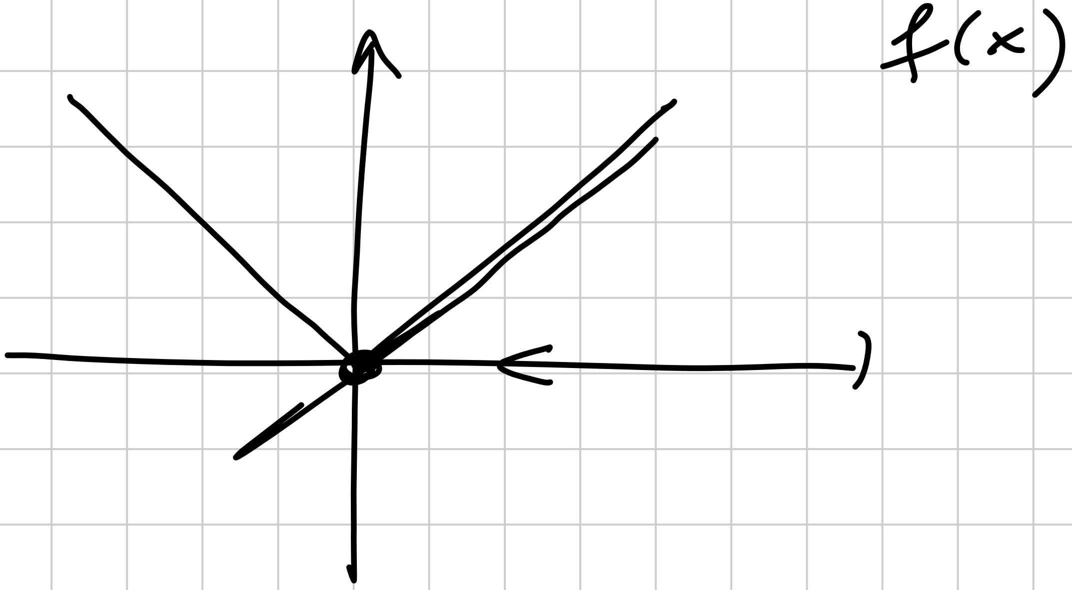
$$\lim_{x \to x_0^-} \left(\qquad \right) = \lim_{h \to 0^-} \left(\quad \right) =: f'_-(x_0)$$

derivata sinistra di f in x_0

es.

$f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1 \qquad f'_-(0) = -1$



f è derivabile in x_0 $\iff$ $\exists$ finiti $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e sono uguali fra loro

Classificazione dei punti di non derivabilità

1) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ $(-\infty)$ a t_g verticale.

Supponiamo che f continua in x_0 ed $\exists$ $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ ma sono diversi (anche ∞)

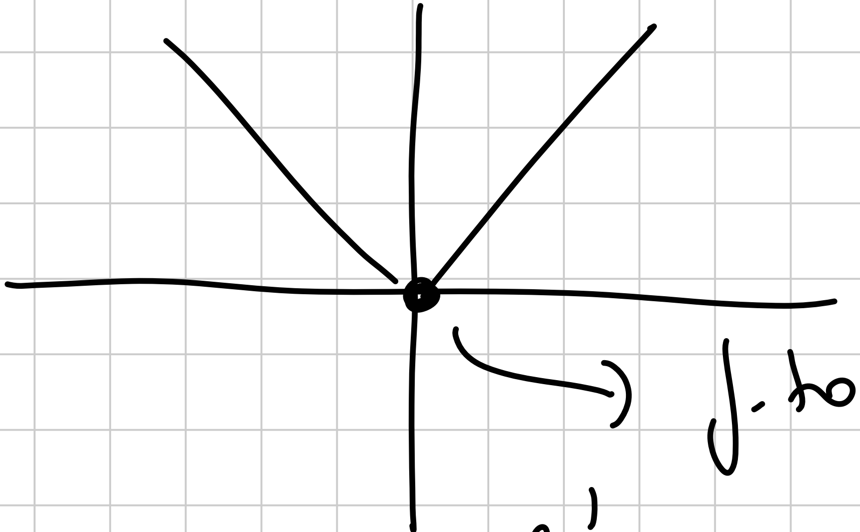
a) se uno dei due è finito, P_0 è un p.to angoloso

b) se uno è $+\infty$ e l'altro è $-\infty$ allora P_0 è una cuspide

$f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1$

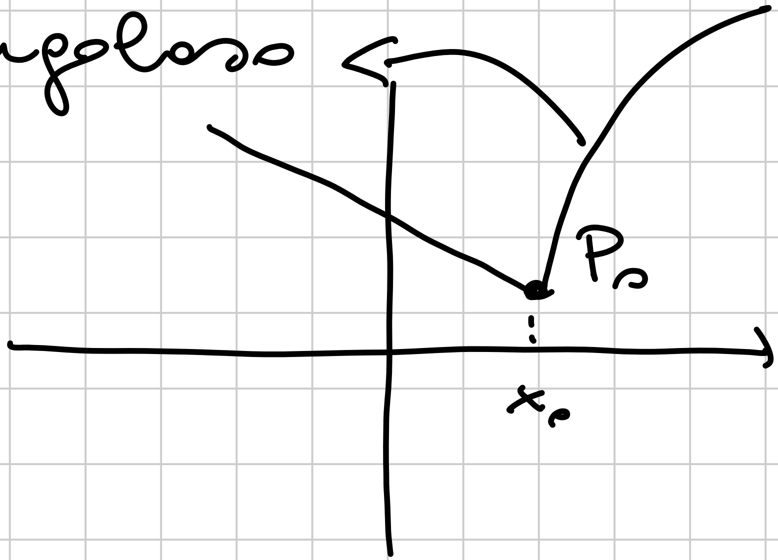
$f'_-(0) = -1$



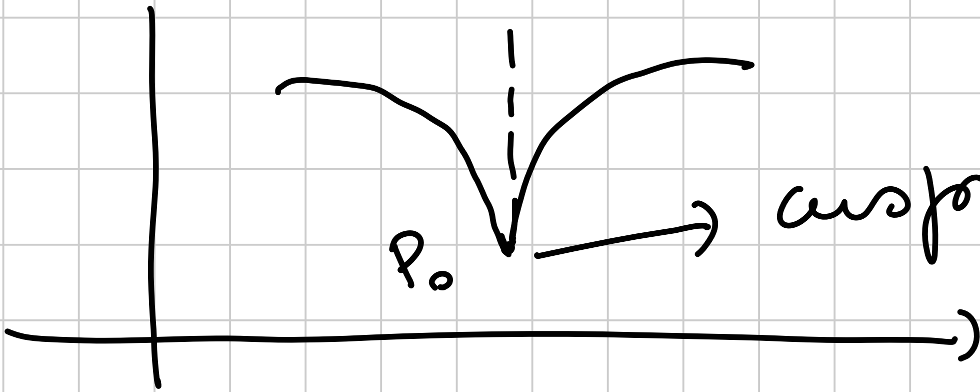
P.to angoloso

$f'_+(x_0) = +\infty$

$f'_-(x_0) = L$



Es.



cuspide

ES. $f(x) = \sqrt{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$ $\quad$ f è continua in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

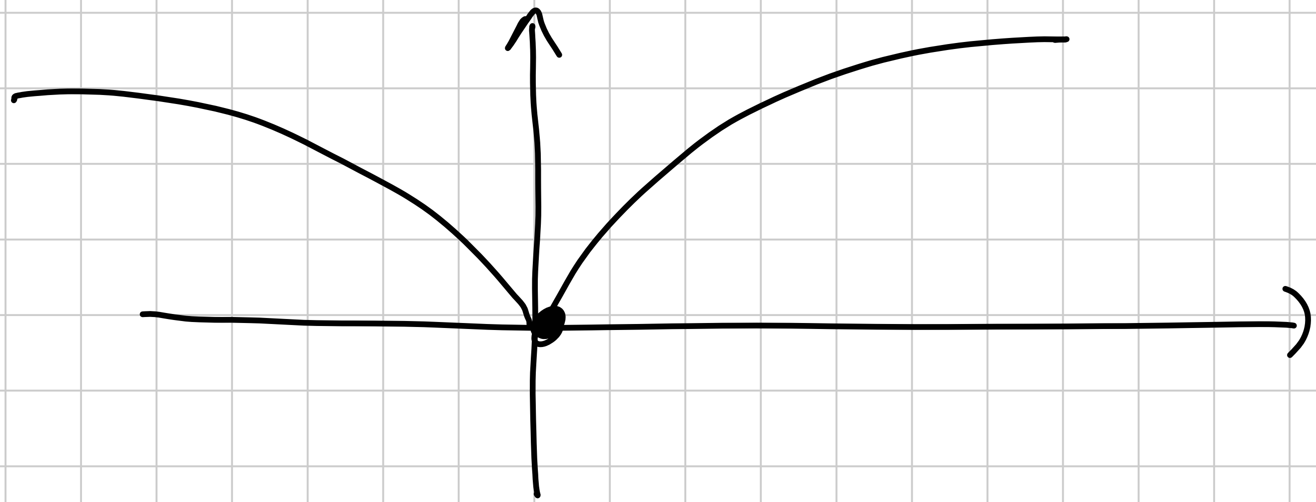
f è derivabile in $x = 0$?

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{-(-h)} = \lim \frac{1}{-(\sqrt{-h})} = -\infty = f'_-(0)$$

$\sqrt{|x|}$ ha in $x = 0$ una CUSPIDE



Algebra delle derivate

Teo. f, g derivabili in x_0 allora

αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$

sono derivabili e

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Dim.

3) Hp. f e g sono derivabili in x_0

Ts. $f \cdot g$ è derivabile in x_0

$$(fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$$

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x)\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} + f(x_0)\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}$$

$x \to x_0$ $\quad \searrow$ $g(x_0)\, f'(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

Es. $\quad h(x) = \operatorname{sen} x \cdot x^5$

$$h'(x) = \cos x \cdot x^5 + \operatorname{sen} x \cdot 5x^4$$