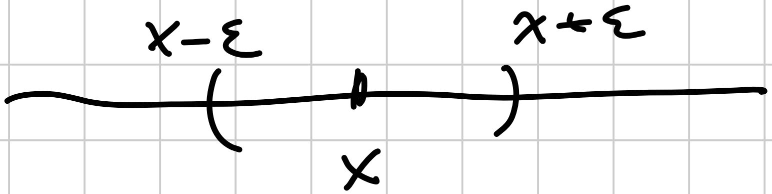
Definizione di intorno $\mathcal{U}$ di un punto $x \in \mathbb{R}^*$

$x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

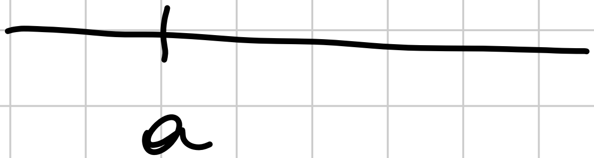
$$\mathcal{U} = (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$$

$$(x-\delta,\ x+\delta)$$



$x = +\infty$

$$\mathcal{U} = (a, +\infty]$$



$a \neq +\infty$

$x = -\infty$

$$\mathcal{U} = [-\infty, b)$$

$b \neq -\infty$

Definizione di limite di funzione

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x \to y$

$x_0 \in \mathbb{R}^*$, punto di accumulazione per X,

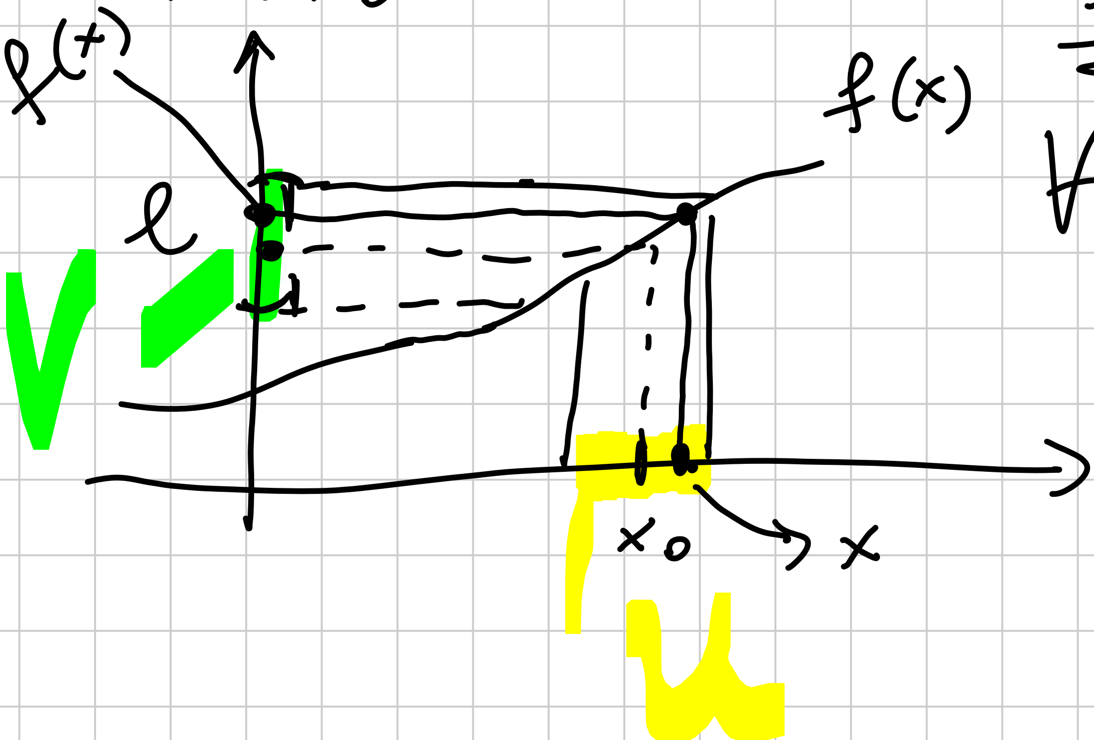
$\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, V \text{ intorno di } \ell$$

$\exists\, \mathcal{U}$ di x_0 t.c.

$\forall\, \underline{x \in \mathcal{U} \cap X}$, $x \neq x_0$

si ha che $f(x) \in V$



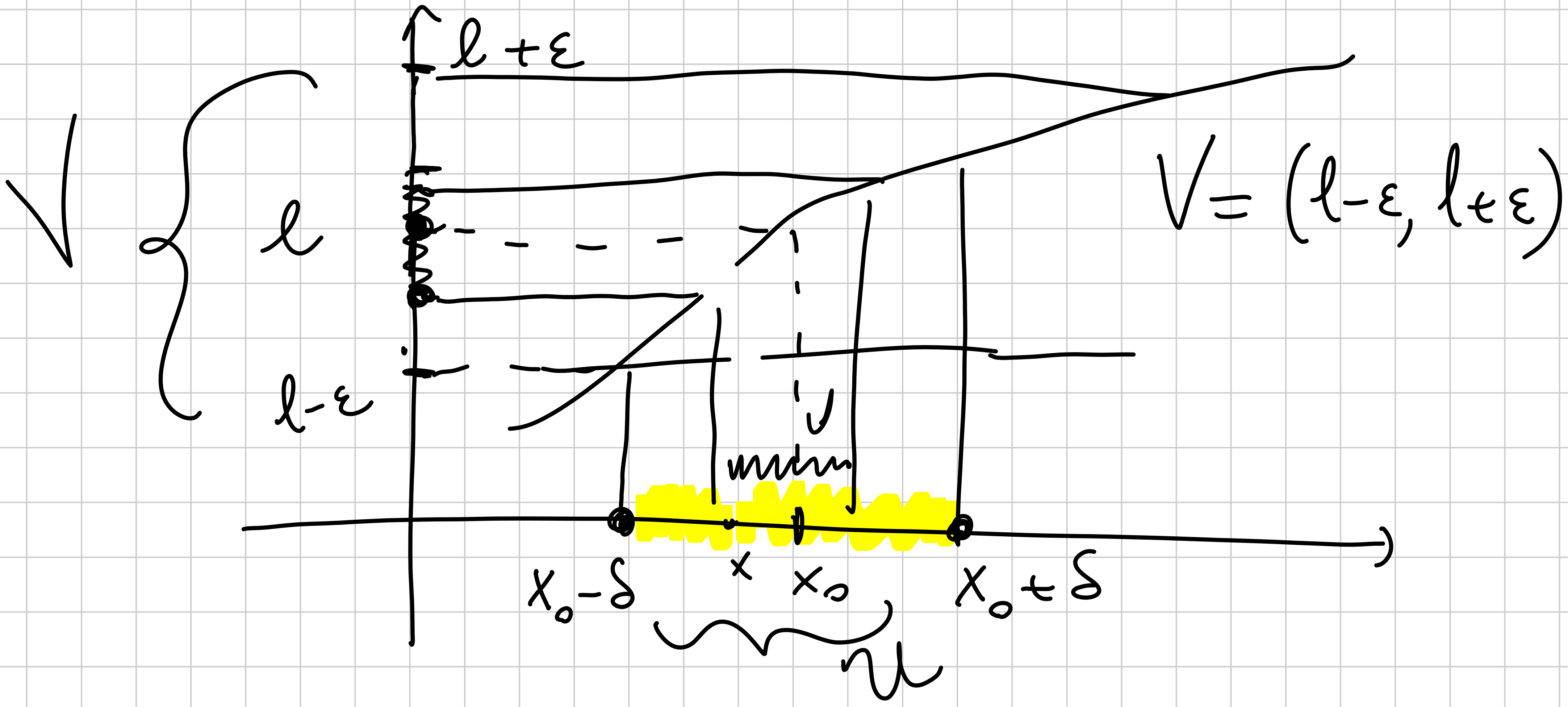
$x_0 \in \mathbb{R}$

$\ell \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, V \text{ intorno di } \ell$$

$\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0 t.c.

$\forall x \in \mathcal{U} \cap X,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V.$



Caso $l \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

$l \in \mathbb{R}$ $\quad V$ intorno di l

$$V = (l - \varepsilon, \; l + \varepsilon)$$

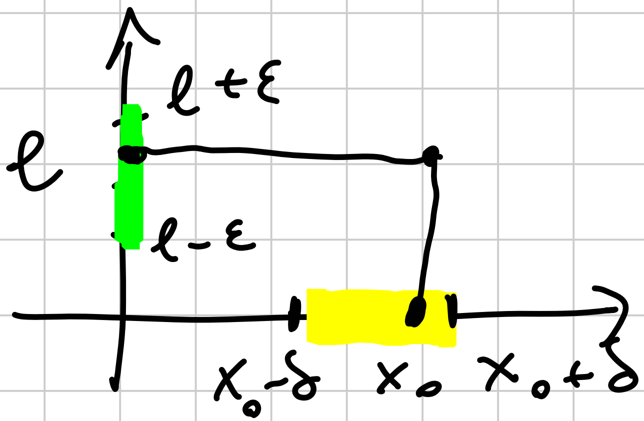
$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ intorno di x_0

$$\mathcal{U} = (x_0 - \delta, \; x_0 + \delta)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; t.c.$$

$$\forall x \in X, \; x \neq x_0 \;\; |x - x_0| < \delta$$

si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

x_0 p.to di accumulazione per X

x_0 può anche non appartenere a X

<u>es.</u> $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$0 \notin X$ ma 0 è un p.to di accumulazione per X

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2}$ 3 è di accumulazione per X

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

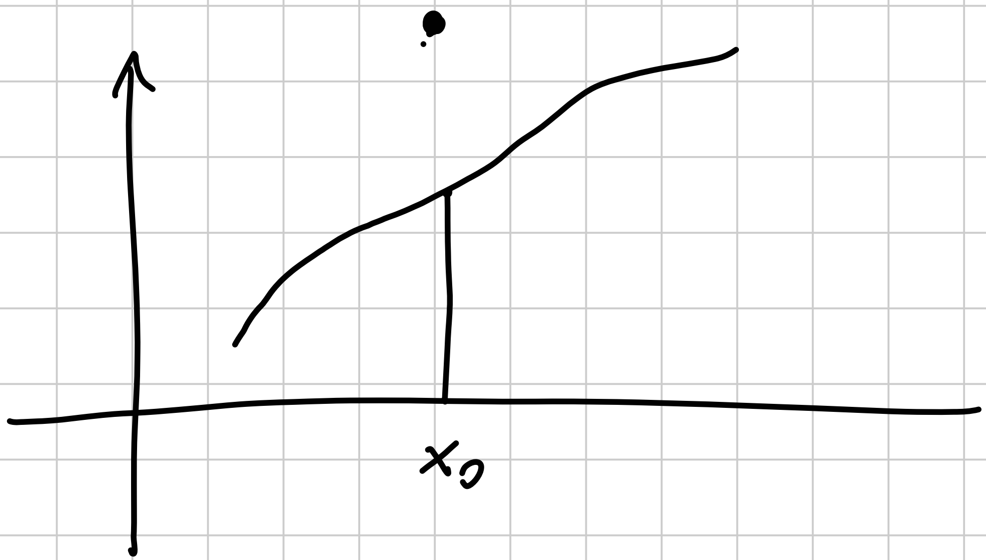
$f(x) \to l$ se $x \to x_0$

$\forall x \in U \cap X$

$x \neq x_0$

non ci interessa quanto vale la f in x_0

$\cancel{f(x_0) \in V}$ non ci interessa



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff [illegible] > 0 \;\; [illegible] > 0 \text{ t.c. } |f(x)-\ell| < \varepsilon \quad \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta$$

<u>Es.</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ $\qquad x_0 = 0$, $\ell = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |x^3 - 0| < \varepsilon \quad \forall x : |x - 0| < \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |x^3| < \varepsilon \quad \forall x : |x| < \delta$$

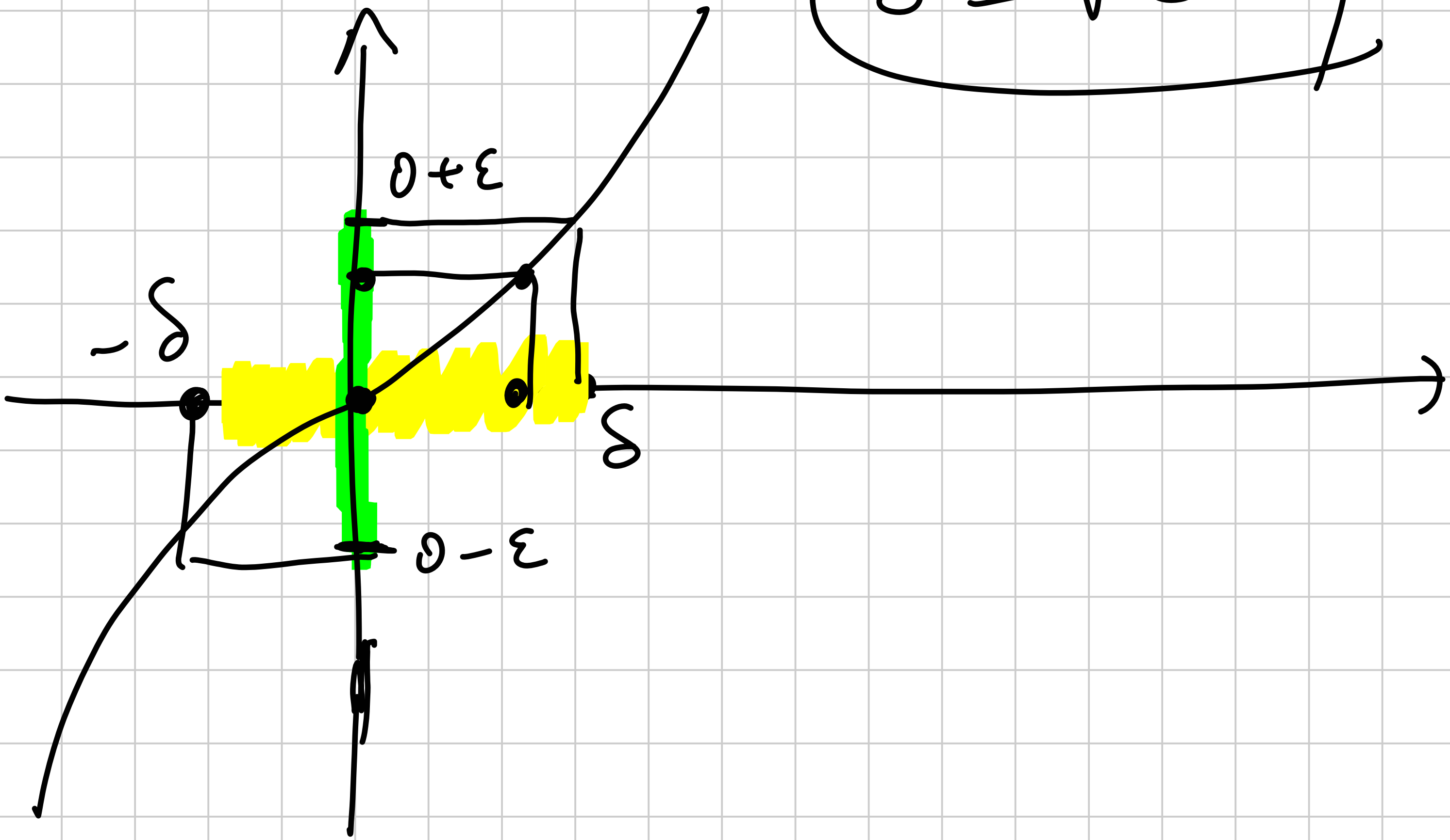
$$|x| < \sqrt[3]{\varepsilon} = \delta$$

$$\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \text{ t.c}$$

$$|x^3| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x| < \delta$$

$$\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$$



$x_0 = 0$

$l = 0$

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 1$$ limite sbagliato

$$\Updownarrow$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ t.c $\quad |x^3 - 1| < \varepsilon$ (con $f(x) = x^3$, $\ell = 1$)

se $\quad |x| < \delta$

$$\Downarrow$$

non si riesce a trovare $\forall \varepsilon$ un δ con tale proprietà

1) $x_0, \ell \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\Updownarrow$

$\forall m \ \exists \delta > 0$ t.c.
se $|x - x_0| < \delta$ si
ha $f(x) > m$

$(\in V)$

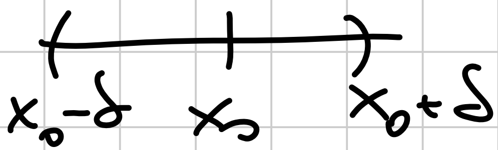
$\in (m, +\infty]$

$x_0 \in \mathbb{R}$

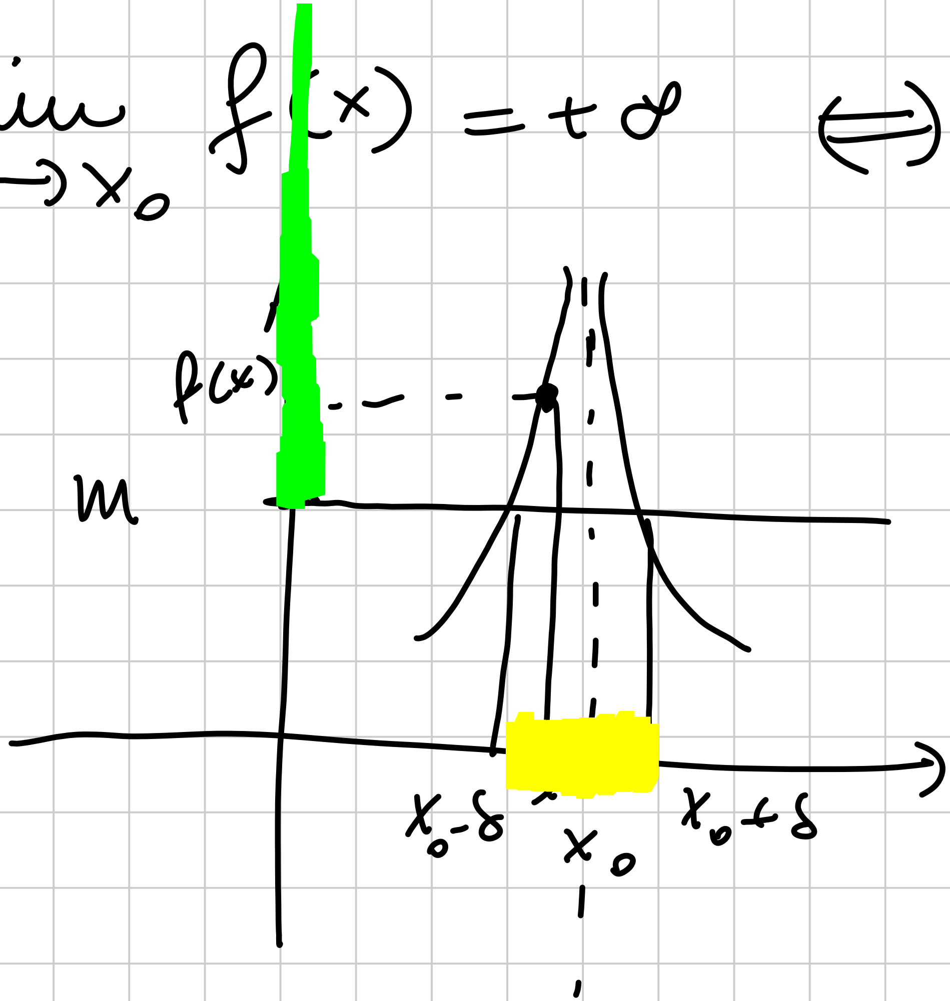
$\ell = +\infty$

$\downarrow$

$V = (m, +\infty]$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall m \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > m$$



$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Verificare con la definizione

$$\Updownarrow$$

$x_0 = 1$

$\forall m \quad \exists \delta$ t.c. $\frac{1}{(x-1)^2} > m, \ \forall x : |x-1| < \delta$

$f(x) > m$

$$\frac{1}{(x-1)^2} > m \quad \underset{m>0}{\Rightarrow} \quad (x-1)^2 < \frac{1}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{m}}$$

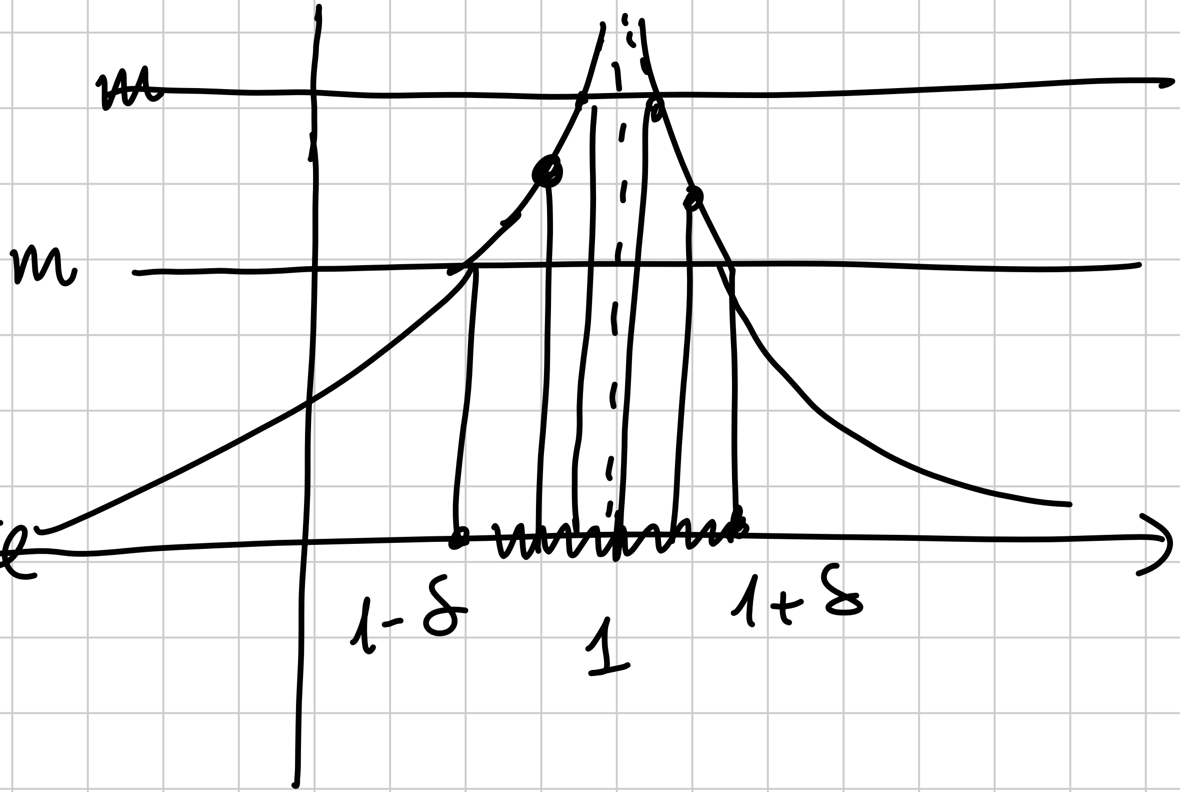
δ

$m<0$ sempre vera!

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$\forall m \ \exists \delta$: se $|x-1| < \delta$ allora

$$\frac{1}{(x-1)^2} > m$$



se aumento m, δ diminuisce

Provare a scrivere le altre definizioni esplicitamente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \ell \in \mathbb{R}$$

$x_0 = -\infty$

$U = (-\infty, k)$

$\Updownarrow$

$V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

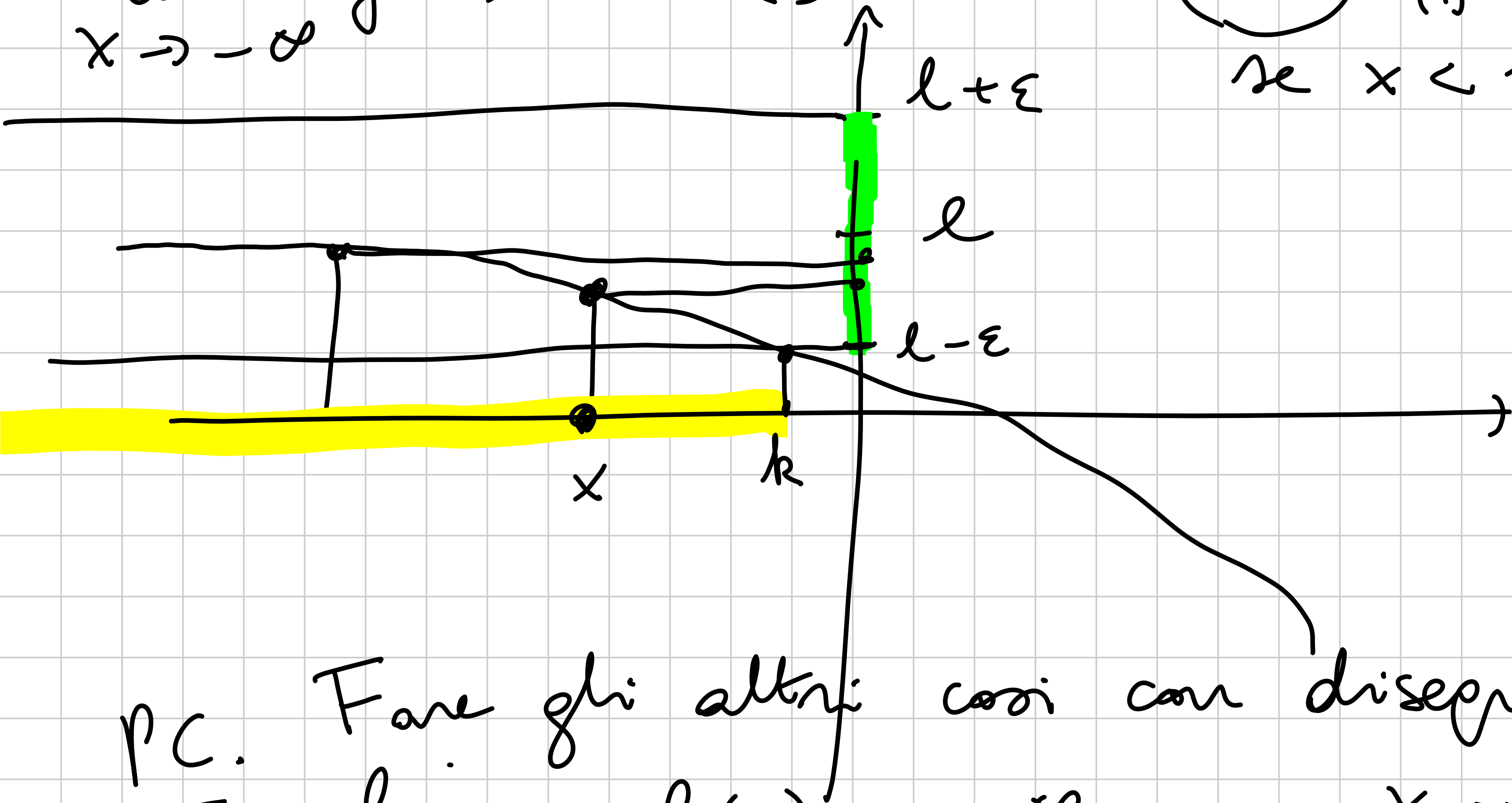
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k \quad t.c.$

$\forall x < k \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x \in U$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k : |f(x) - l| < \varepsilon$$

se $x < k$



PC. Fare gli altri casi con disegni

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad x_0 = +\infty \quad l = -\infty$$

Teorema di unicità del limite

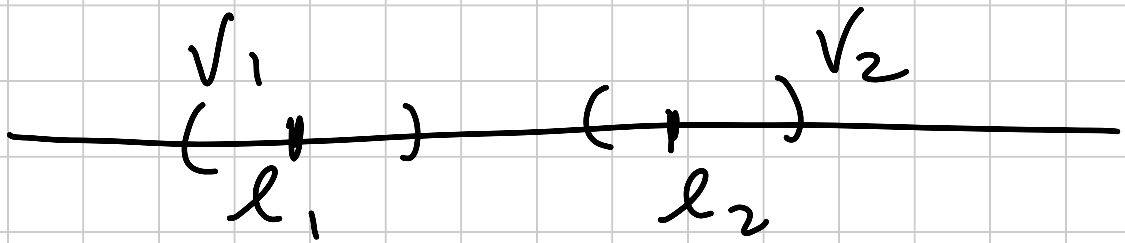
Sia $l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $l_2 = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Allora $l_1 = l_2$

Dim. Per assurdo $l_1 \neq l_2$

- $\forall V_1$ intorno di l_1 $\exists U_1$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ se $x \in U_1$.

•• $\forall V_2$ intorno di l_2 $\exists U_2$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ se $x \in U_2$



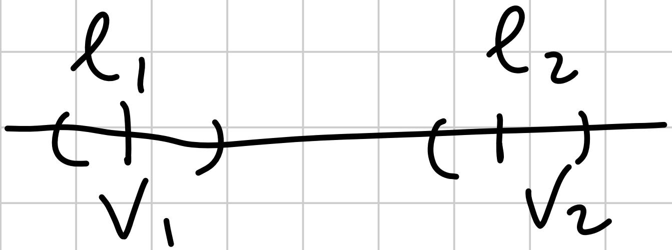
Trovo V_1 e V_2 intorno di l_1 e l_2 t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

preso V_1 di l_1 trovo U_1 t.c.

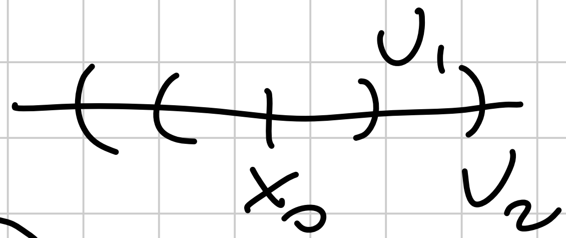
se $x \in U_1 \Rightarrow f(x) \in V_1$

preso V_2 di l_2 trovo U_2 t.c.

se $x \in U_2 \Rightarrow f(x) \in V_2$



$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

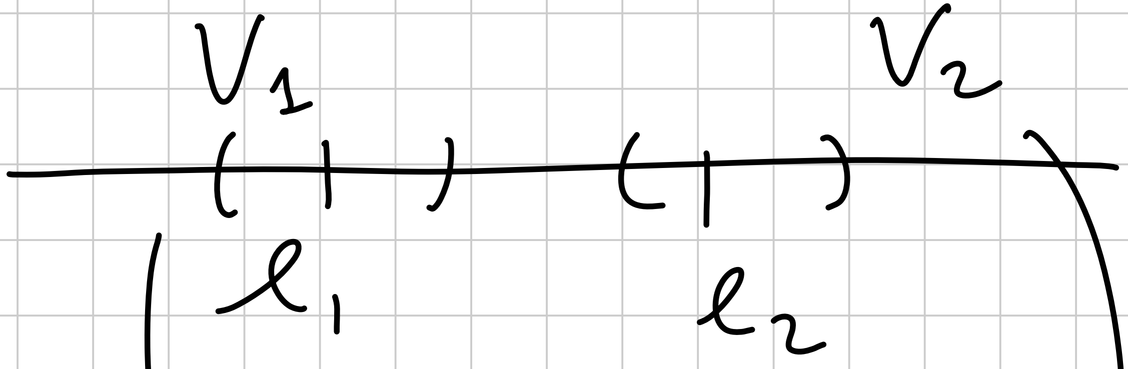


U_1 e U_2 sono intorno di x_0

$$x \in U_1 \cap U_2 \begin{cases} x \in U_1 \Rightarrow f(x) \in V_1 \\ x \in U_2 \Rightarrow f(x) \in V_2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$$

assurdo!

Teorema di <u>unicità del limite</u>



$l_1 \neq l_2$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

U_1 intorno di x_0

U_2 intorno di x_0

$$x \in U_1 \cap U_2$$

$$f(x) \in V_1 \cap V_2 \quad \text{assurdo!}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff |f(x) - \ell - 0| < \varepsilon$$

es.: $$\lim_{x \to 1} x^3 = 1 \iff \lim_{x \to 1} (x^3 - 1) = 0.$$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora

la $f(x)$ è limitata in un intorno di x_0

oss. $f(x)$ è limitata in U se $\exists$ m, M t.c. $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in U$.

es. $f(x) = \operatorname{sen} x$ è limitata in $\mathbb{R}$

$$\underbrace{-1}_{m} \leq \operatorname{sen} x \leq \underbrace{1}_{M} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-100 \leq \operatorname{sen} x \leq 100$$

es. $f(x) = x^2$ è limitata in $U = [0,1]$.

$0 \leq x^2 \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$f(x) = x^2$ **non** è limitata in $\mathbb{R}$

f è limitata in un intorno di x_0 $\not\Rightarrow$ f ha limite finito in tale intorno

Es. $f(x) = \operatorname{sen} x$ è limitata in $\mathbb{R}$

ma $f(x) = \operatorname{sen} x$ **non** ha limite per $x \to +\infty$.

(a dim. fra un po')

Proprietà dei limiti

Teo. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, U$ di x_0 t.c. $f(x)$ è limitata $\forall x \in U$

Dim. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, U$ di x_0 t.c.
$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ se $x \in U$] Hp

$$\Downarrow \qquad -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$$

$$\underbrace{\ell - \varepsilon}_{m} < f(x) < \overset{M}{\ell + \varepsilon} \quad \forall x \in U$$

$\Rightarrow$ f è limitata in U

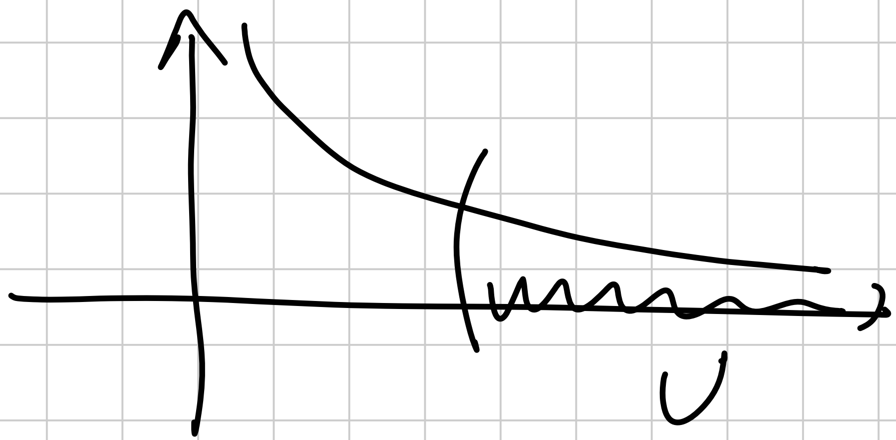
PC.

Es. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \underbrace{0}_{\ell}$$

verifico con la definizione di limite

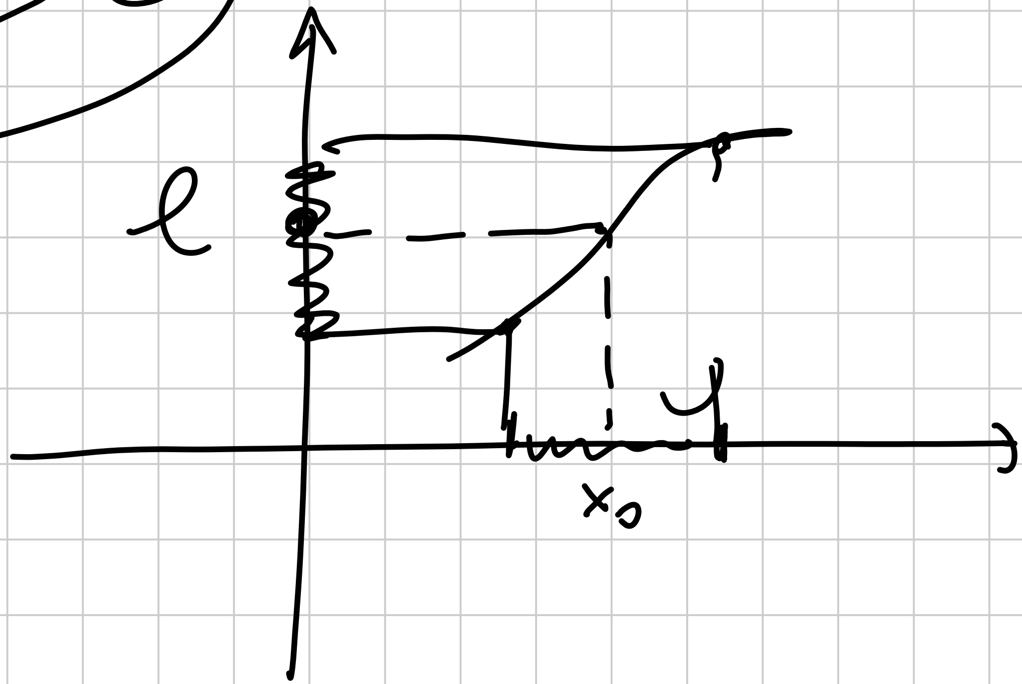
il teorema ci dice che $f(x) = \frac{1}{x}$ è limitata in un intorno di $+\infty$



f che ha limite finito $x \to x_0 \Rightarrow$ è limitata in un intorno di x_0

Teorema di permanenza del segno

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$$



Teorema di permanenza del segno

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ allora $\exists\, U$ di x_0

$l \in \mathbb{R}^*$ t.c.

$x_0 \in \mathbb{R}^*$ $f(x) > 0, \forall x \in U$

<u>Dim.</u> $l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, U$ di x_0 : $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\forall x \in U$

$f(x) > l - \varepsilon > 0$

$\forall x \in U$

oss. non vale il **viceversa**:

se $f(x) > 0$ in U di x_0 e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\not\Rightarrow l > 0$

$\Rightarrow l \geq 0$

es. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad x_0 = +\infty$

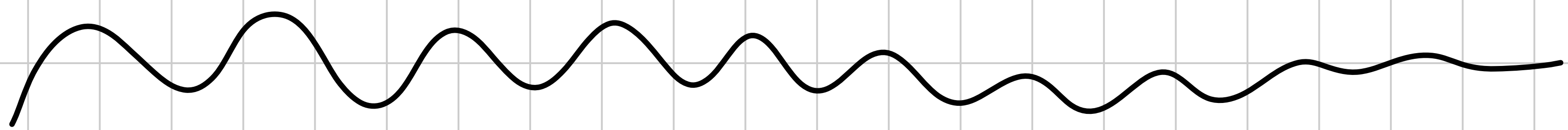
$f(x) > 0 \quad \forall x > 0$

ma $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Il teo. di permanenza del segno si può anche enunciare così:

Se $f(x) \geq 0$ in U di x_0

e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\Rightarrow l \geq 0$



Es. su dominio di funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

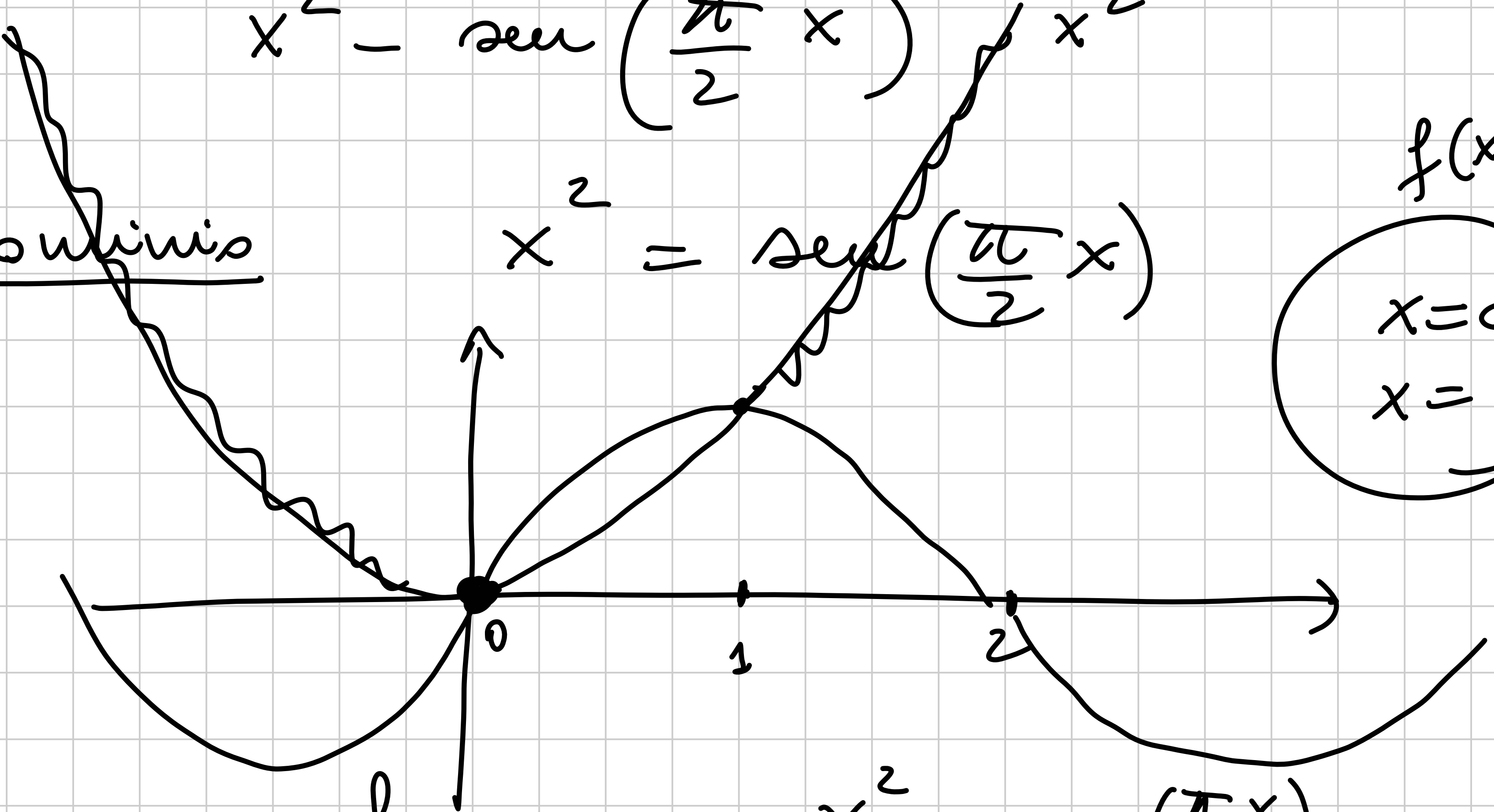
$X = \{x \neq 0, 1\}$

Dominio

$$x^2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$f(x) = g(x)$

$x = 0$
$x = 1$



Segno $f > 0$ $\quad x^2 > \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

periodicità

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$f(x+P) = f(x) \quad \forall x$$

$$\boxed{\frac{\cancel{\pi}}{2}P = 2\cancel{\pi}}$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x+P)\right) = \operatorname{sen}\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}x}_{y} + \frac{\pi}{2}P\right) \overset{?}{=}$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\operatorname{sen}(y + 2\pi) = \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow P = 4$$ periodo