Calcolo di derivate

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

es $$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3x+2}\right)' = \frac{(\cos x)(3x+2) - \operatorname{sen} x \cdot 3}{(3x+2)^2}$$

$$(3x+2)' = (3x)' + 0 = 3$$

$f \equiv 1$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

es. $\left(\frac{1}{\log x}\right)' = -\frac{1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x}$

es. $f(x) = 3x^2 + e^x + \operatorname{sen} x \cdot x + \frac{e^x}{\cos x}$

$f'(x) = 6x + e^x + (\cos x \cdot x + \operatorname{sen} x \cdot 1) +$

$+ \frac{e^x \cdot \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

Derivata di <u>funzione composta</u>.

<u>Teo.</u> g derivabile in x_0 e f derivabile in $g(x_0)$. Allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

<u>Dim.</u> <u>cenno</u> nel caso che $g'(x_0) \neq 0$

$\Downarrow$ in un intorno di x_0

$g(x) \neq g(x_0)$

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$x \to x_0$ $\quad g(x) \to g(x_0)$

$\downarrow g'(x_0)$ $\qquad \to f'(g(x_0))$

es. $\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)' = \cos(x^2) \cdot 2x$

$$x \xrightarrow[g]{} x^2 \xrightarrow[f]{} \operatorname{sen}(x^2)$$

$f(y) = \operatorname{sen} y$

$g(x) = x^2$

es. $h(x) = e^{-(2x+1)}$

$$x \xrightarrow[g]{} -(2x+1) \xrightarrow[f]{} e^{-(2x+1)}$$

$f(y) = e^y$

$g(x) = -(2x+1)$

$$h'(x) = e^{-(2x+1)} \cdot (-2)$$

$f'(g(x))$

<u>es.</u> $a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$

$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a =$
$= a^x \log a$

<u>es.</u> $(5^x)' = 5^x \log 5$

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - \left(e^{-x} \cdot (-1)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x$$

$$f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x$$

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \log(\operatorname{sen} x)}$$

$$f'(x) = e^{\cos x \log(\operatorname{sen} x)} \cdot \left(-\operatorname{sen} x \cdot \log(\operatorname{sen} x) + \right.$$

$$\left. + \cos x \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \right) =$$

$$= (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \left(\qquad \right)$$

$$f(x) = x^{x} = e^{x \log x}$$

$$f'(x) = e^{x \log x} \left(1 \cdot \log x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \right) =$$

$$= x^x (\log x + 1)$$

<u>es.</u> $\log(\operatorname{sen}(x^2)) = h(x)$ composizione di 3 funzioni

$$h'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \cos x^2 \cdot 2x$$

<u>es.</u> $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

Derivate funzioni inverse

Teo. $f : I \to \mathbb{R}$ continua, strettamente monotona, derivabile in x_0, $f'(x_0) \neq 0$.
Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$
e
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad y_0 = f(x_0)$$

Dim.
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$$

$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$

$y \to y_0 \implies x \to x_0$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

<u>oss.</u> Se già so che $f^{-1}(y_0)$ è derivabile

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' \cdot f'(x) = 1 \qquad \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad y_0 = f(x_0)$$

es. $f(x) = e^x$ $\qquad f^{-1}(y) = \log y$

$$e^x = y \iff x = \log y$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

$$(\log y)' = \frac{1}{y}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y \qquad y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} y$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\cos x \geq 0$$

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

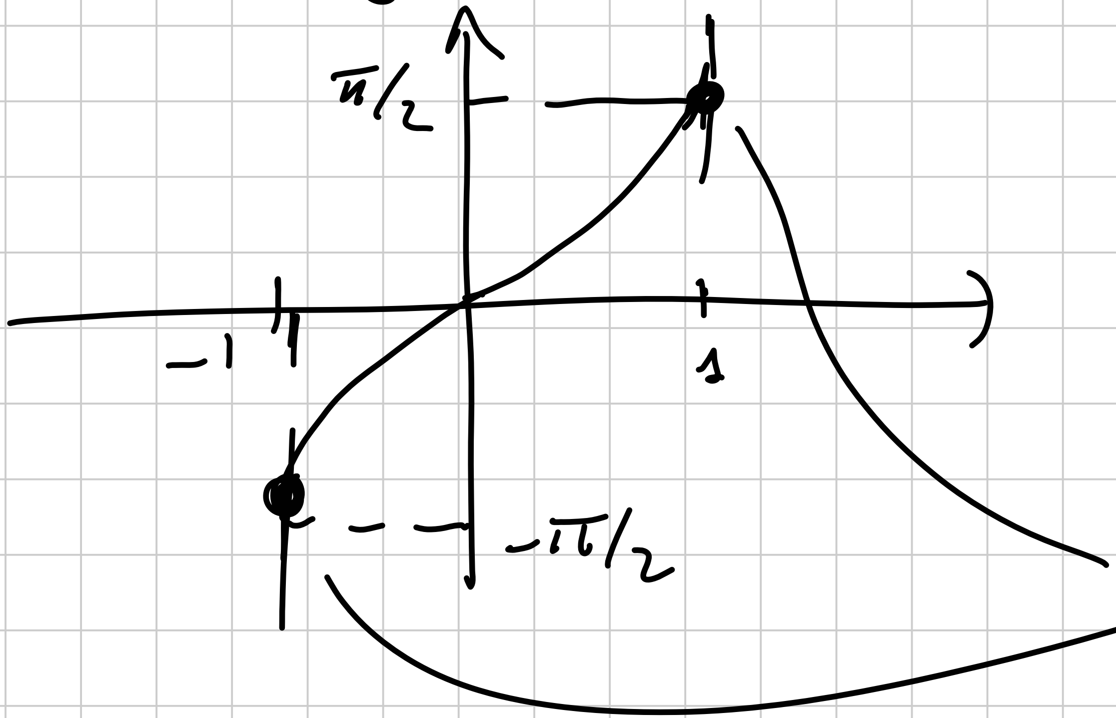
$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$$

$$(\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$|y| < 1$$

arcsen y è definita per $|y| \leq 1$



$$\lim_{y \to 1^-} (\text{arcsen}\, y)' = +\infty$$

$$\lim_{y \to -1^+} (\text{arcsen}\, y)' = +\infty$$

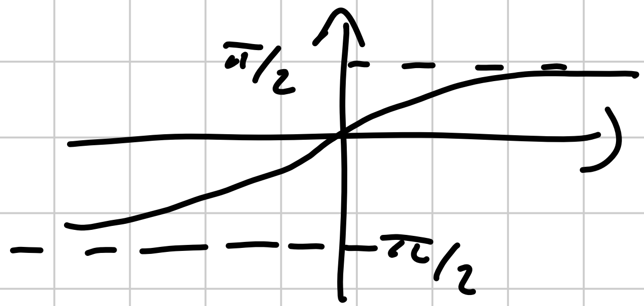
p.ti a tangente verticale

arcsen y Dominio $\{|y| \leq 1\}$

p.ti in cui è derivabile $\{|y| < 1\}$

<u>PC.</u> $f(y) = \arccos y$ $f'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f(x) = \operatorname{tg} x = y$$



$$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\underbrace{1 + \operatorname{tg}^2 x}_{1+y^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

$f(x) = \operatorname{senh} x$

$f'(x) = \cosh x$

$f^{-1}(y) = \operatorname{settsenh} y$

$y = \operatorname{senh} x \Leftrightarrow \operatorname{settsenh} y = x$

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$

$\cosh x = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 x}$

$= \sqrt{1 + y^2}$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\cosh x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

PC $\quad f(x) = \cosh x$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$\cosh x = y \geqslant 1$

$|y| > 1$

Oss. $f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Es. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{\operatorname{sen} x}} = \left(x + (\operatorname{sen} x)^{1/2}\right)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x + (\operatorname{sen} x)^{1/2}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^{-1/2} \cdot \cos x\right)$$

Es. $f(x) = \arcsin\left(\log^2(3x)\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \log^4(3x)}} \cdot 2\log(3x) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3$$

<u>OSS.</u>

$f(x) = \log x$ è continua $f \in C^0(\{x>0\})$ $\forall x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ è continua $\forall x > 0$

$f(x) \in C^1(\{x>0\})$

derivata seconda di $f(x) = \log x$

$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' =$

$= -\frac{1}{x^2}$ è continua in $x > 0$

$f \in C^2(\{x>0\})$

$f'''(x) \ldots$

$$f(x), \quad f'(x), \quad f'', \quad \dots \quad f^{(k)}(x)$$

$$f \in C^k(D)$$ se f ha tutte le derivate fino all'ordine k continue.

$$f(x) = e^x \qquad f^{(k)}(x) = e^x$$

$$f \in C^k \quad \forall k \quad \Rightarrow f \in C^\infty$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f'''(x) = -\cos x$$

$f^{(iv)} = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $f \in C^{\infty}$

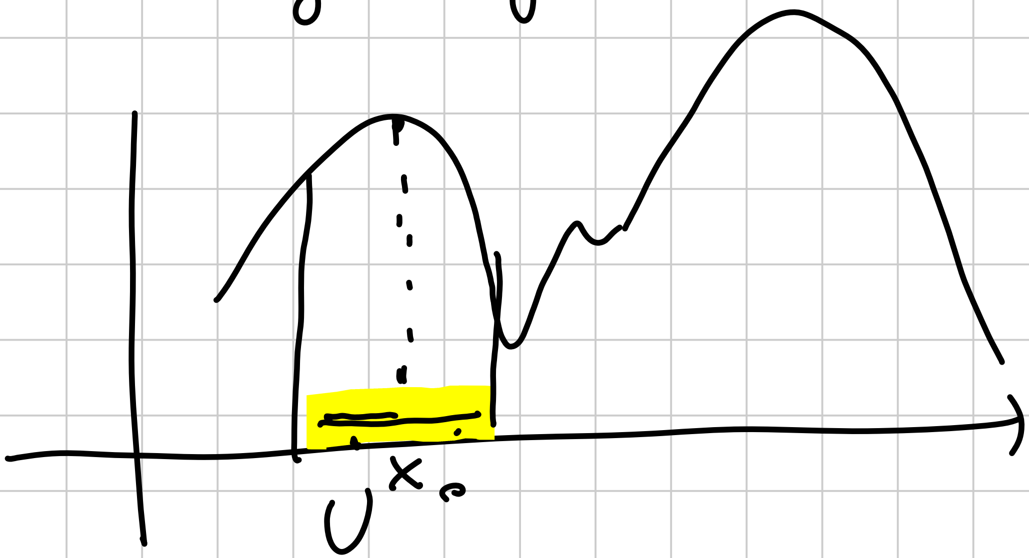
Estremi locali e derivate

Def. x_0 p.to di minimo (locale, relativo) di f se $\exists\, U$ di x_0 t.c.

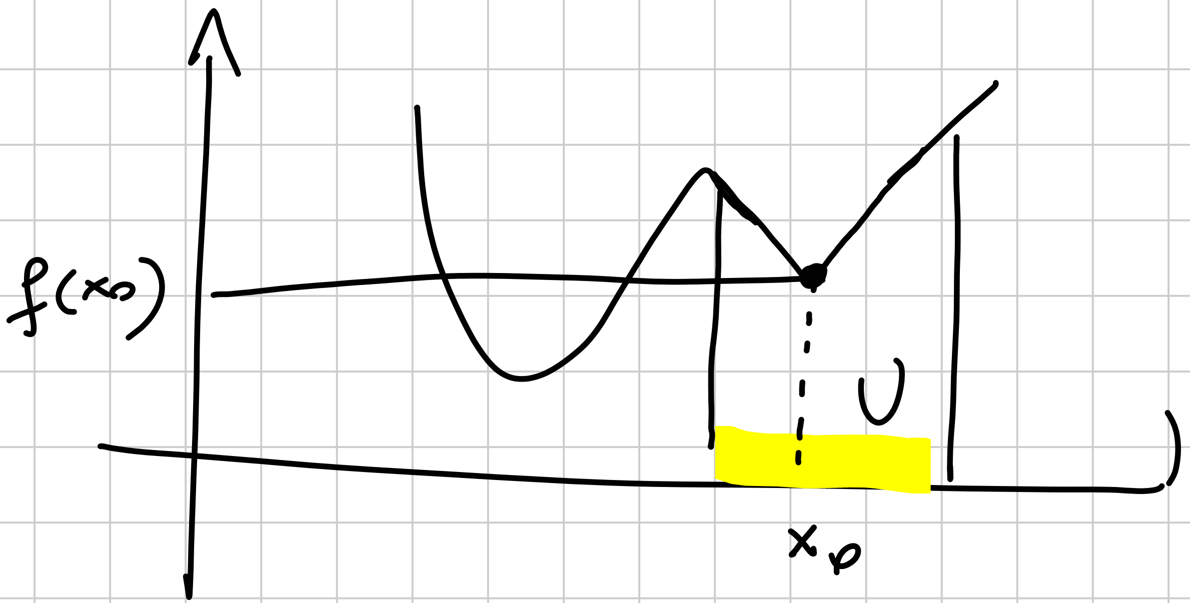
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U$$

$f(x_0)$ minimo (locale, relativo)

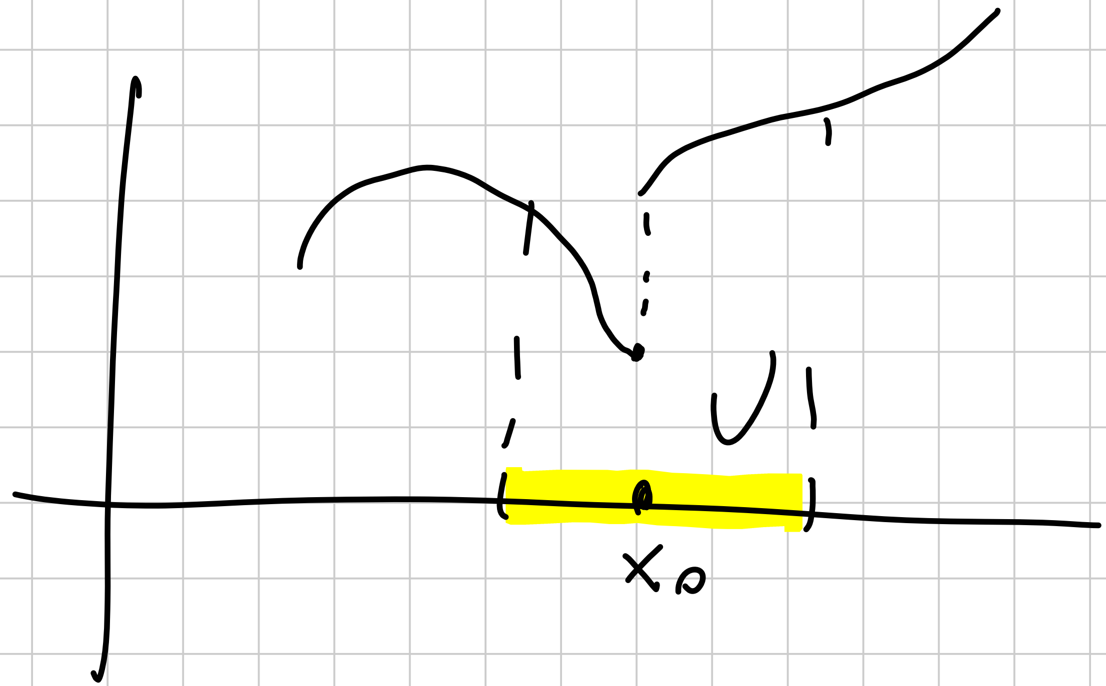
analog. punto di massimo, massimo.



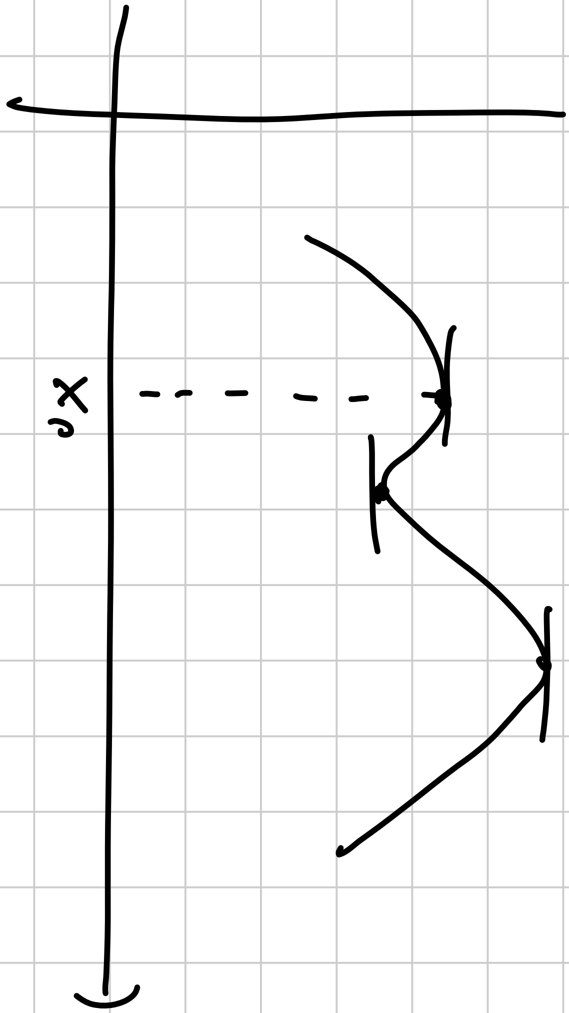
$$f(x) \leq f(x_0)$$



$\forall x \in U$
$f(x) \geq f(x_0)$



$\forall x \in U$
$f(x) \geq f(x_0)$


x

Teorema di Fermat

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. f derivabile in x_0 e f ha un estremo locale in x_0.

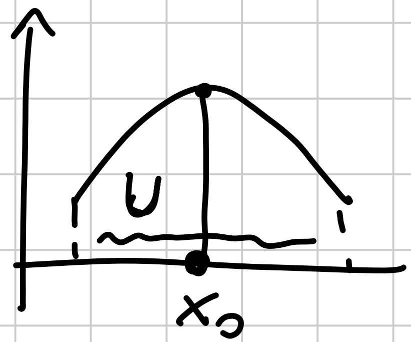
Allora $f'(x_0) = 0$

Dim. per es. x_0 p.to di massimo locale

$\exists U : \forall x \in U$

$f(x) \le f(x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & x < x_0 \\ \leq 0 & x > x_0 \end{cases}$$



$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

permanenza segno

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \left(\qquad \right) \leq 0$$

se f è derivabile in x_0

$$\underbrace{f'_-(x_0)}_{\geq 0} = \underbrace{f'_+(x_0)}_{\leq 0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

■

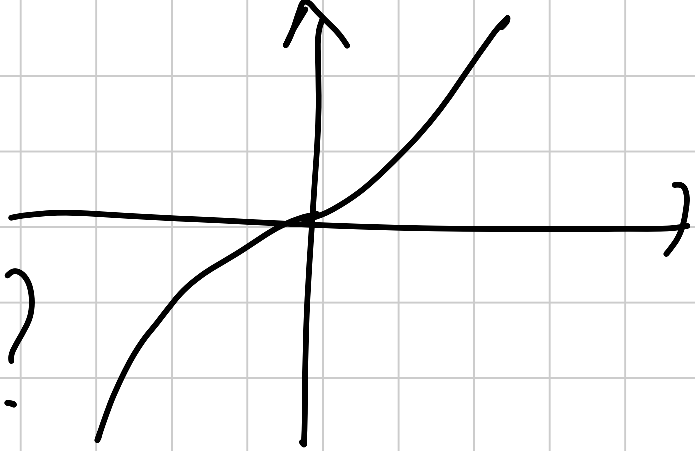
__oss.__ Il Teo. di Fermat è una condizione __necessaria__ perché un p.to in cui f è derivabile sia un estremo locale

__Def.__ x_0 si dice p.to critico e stazionario per f se f è derivabile in x_0 e

$$f'(x_0) = 0$$

__oss.__ Il teo. di Fermat __non__ è una condizione sufficiente perché un p.to sia un estremo locale.

$f(x) = x^3$

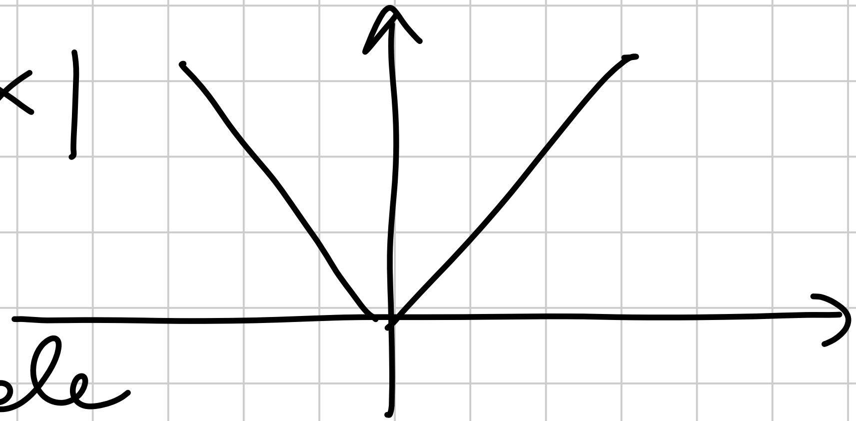


quali sono i p.ti critici di $f(x)$?

$f'(x) = 3x^2 = 0 \qquad x = 0$

$x=0$ p.to critico per f ma
$x=0$ non è p.to di estremo locale

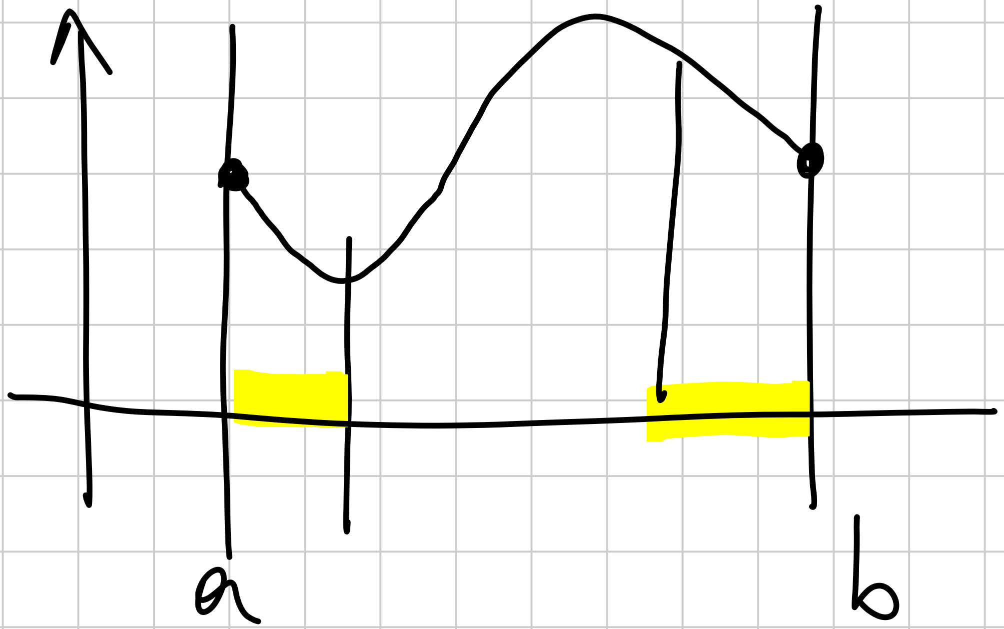
<u>Es.</u> $f(x) = |x|$



$x=0$ p.to
di minimo locale

ma non si può applicare il Teorema di Fermat perché $|x|$ non é derivabile in $x=0$

3° caso



x_0 non e interno all'intervallo

Quindi

Se x_0 è un p.to di estremo locale per f può succedere:

1) $x_0 \in (a, b)$, f derivabile in x_0 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

2) f **non** è derivabile in x_0

3) x_0 è un estremo dell'intervallo

ES. $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad \mathbb{R} \quad$ continua

$f'(x) = \cos x$

i p.ti critici $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

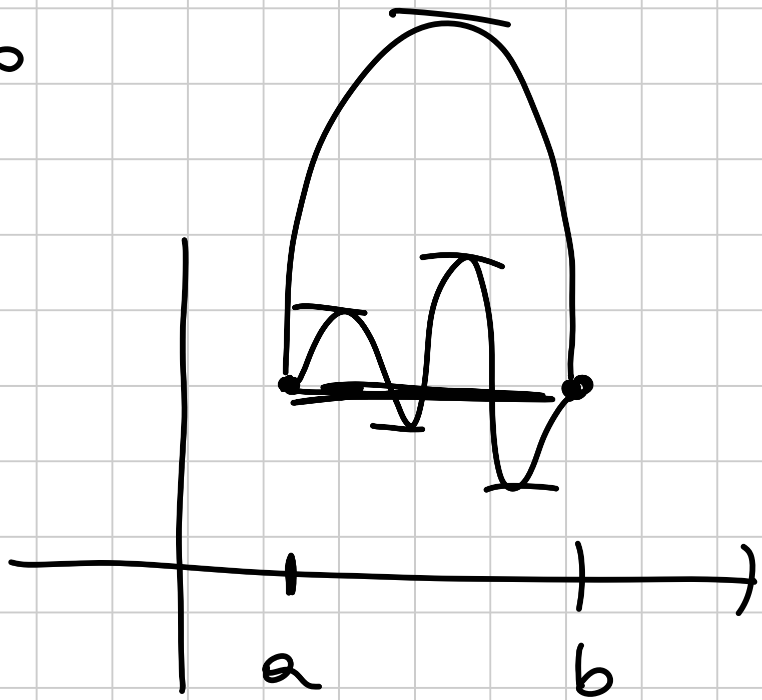
se $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha p.ti di estremo li devo cercare tra i p.ti critici, cioè sono tra

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Teorema di Rolle

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), t.c. $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$



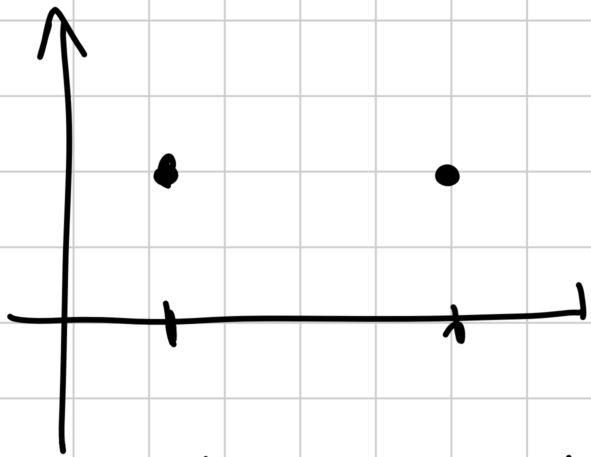
Dim. f continua in un intervallo chiuso e limitato per il teo. di Weierstrass ha sempre max e min.

$M = \max$, $m = \min$

$f(x_1) = M$ $f(x_2) = m$

1) $M = m \Rightarrow f$ è costante $\Rightarrow f'(x) = 0$
$\forall x \in (a, b)$
Vale Rolle

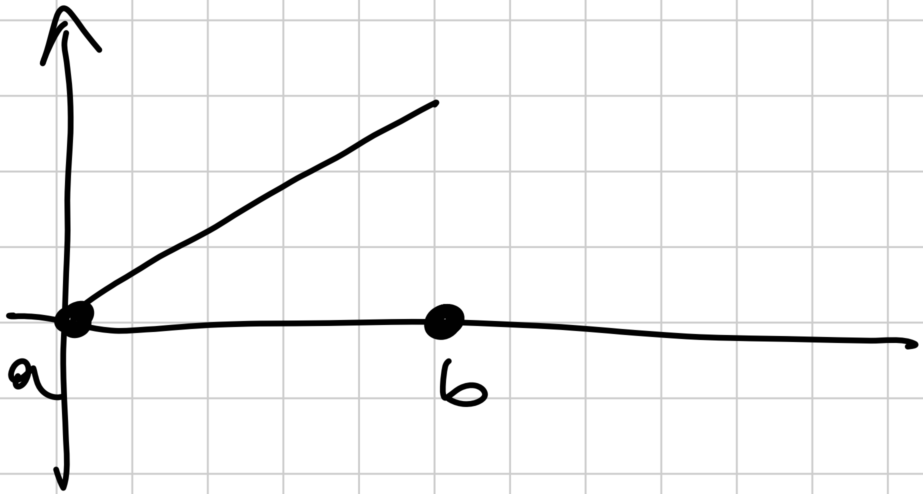
2) $M > m$



poiché $f(a) = f(b)$
o il p.to di massimo o il
p.to di minimo è interno ad (a, b).
in tale p.to la f è derivabile
$\Rightarrow$ dal teo. di Fermat
$$f'(x_1) = 0$$

Le ipotesi non si possono indebolire

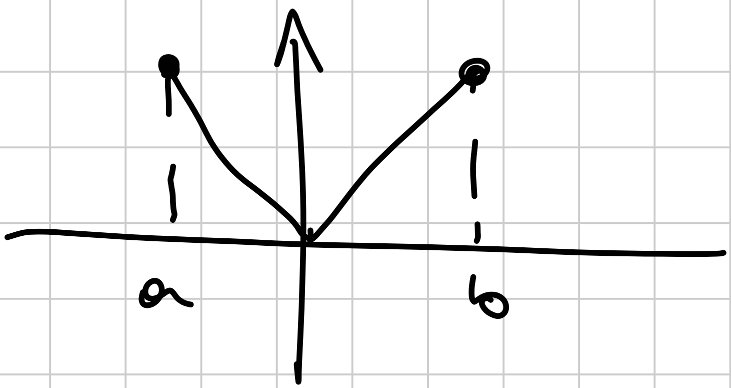
- f continua in (a,b)



$\nexists\, c : f'(c)=0$

- f non è derivabile in $x_0 \in (a,b)$

non vale



$\exists\, c : f'(c)=0$