x_0 in cui f è derivabile e $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ p.ti stazionari

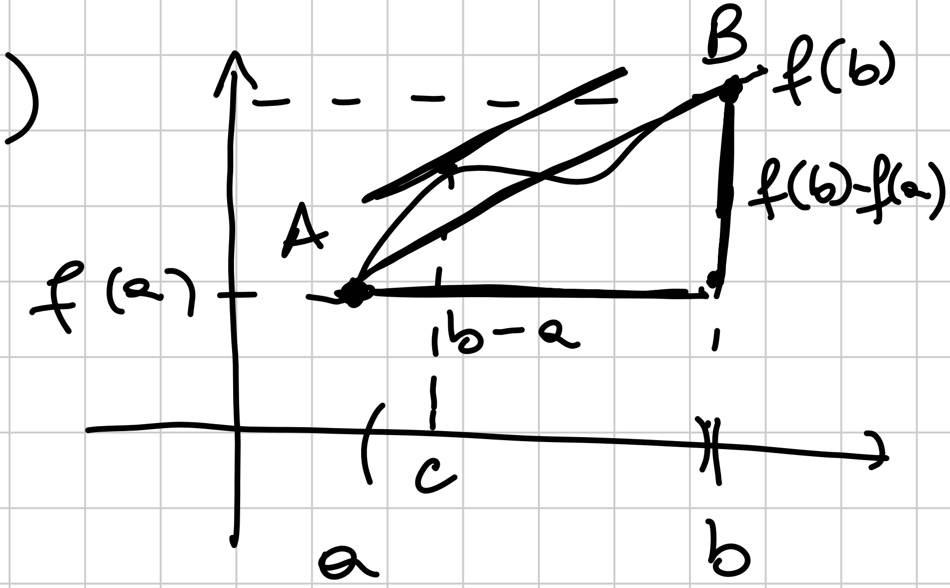
Teo. di Fermat x_0 è un estremo locale e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Teo di Rolle $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ derivabile in (a,b), $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ $c \in (a,b) : f'(c) = 0$

Teorema di Lagrange (valor medio)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b). Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pendenza media}} = \underbrace{f'(c)}$$



Dim.

$$h(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \right]}_{\text{retta per } A \text{ e } B}$$

$A = (a, f(a))$

$B = (b, f(b))$

Voglio applicare Rolle ad $h(x)$.

$h(a) = 0 = h(b)$, h continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $h'(c) = 0$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

#

Conseguenze di <u>Lagrange</u>

Test di <u>monotonia</u>

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b)

$f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a,b) \iff f$ è crescente in (a,b)

$f'(x) \leq 0, \quad " \quad \iff f$ è decrescente in (a,b)

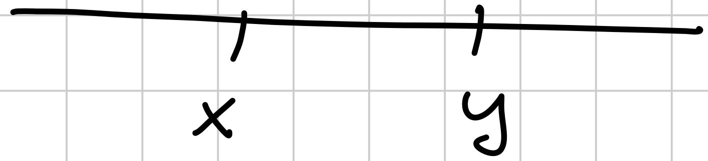
$f'(x) > 0, \quad " \quad \Rightarrow f$ è strett. crescente in (a,b)

$f'(x) < 0, \quad " \quad \Rightarrow f$ è strett decresc. in (a,b)

<u>Dim.</u> $f' \geq 0$ in $(a,b) \iff f$ è crescente in (a,b)

$\Leftarrow$ <u>Hp.</u> f crescente in (a,b) <u>Ts</u> $f' \geq 0$ in (a,b)

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$



$f(y) \geq f(x)$

perché è crescente

$\lim_{y \to x} (\geq 0)$ è ≥ 0

$f'(x) \geq 0$ $\quad \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow$ se $\underbrace{f'(x) \geq 0 \text{ in } (a,b)}_{Hp} \Rightarrow \underbrace{f \text{ è crescente in } (a,b)}_{Ts}$.

? $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

per il teorema di Lagrange $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$f'(c) \geq 0$ per i ptoni R

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

//

__Oss:__ se f strett. crescente in (a,b) $\not\Rightarrow$ $f' > 0$ in (a,b)

f derivabile in (a,b)

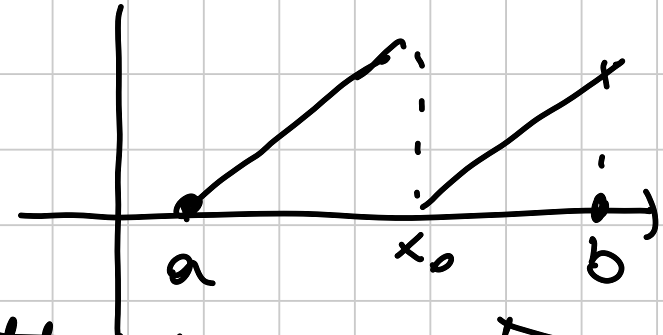
$f(x) = x^3$ strett. crescente

__ma__ $f'(x) \geq 0$

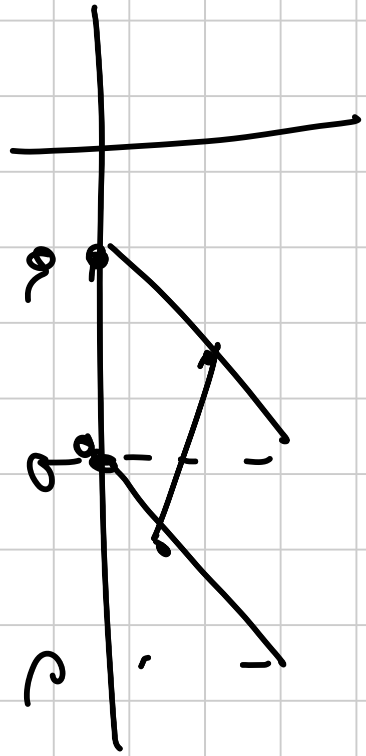
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$

__oss.__ f deve essere derivabile in __tutto__ (a,b)

$f' > 0$ dove esiste



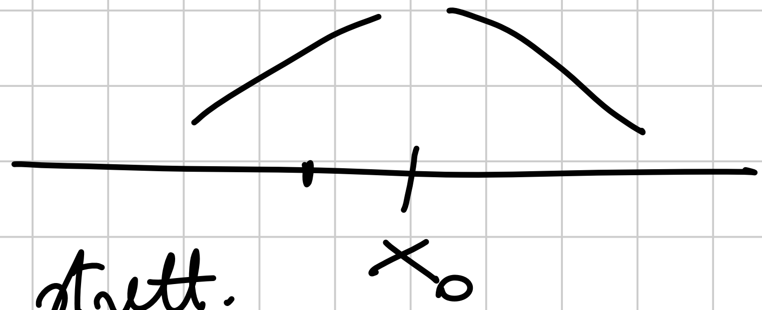
__ma__ $\Rightarrow f$ non è strett. crescente



Dal test di monotonia segue lo studio della natura dei p.ti stazionari

In generale (a, b) $\quad f$ è derivabile in (a, b)

$x_0 \quad f'(x_0) = 0$



se $x < x_0 \quad f'(x) > 0$ $\Rightarrow f$ strett. crescente

$x > x_0 \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strett. decresc.

x_0 p.to di massimo locale

Viceversa $\quad x_0$ p.to di minimo locale può succedere che

x_0 $\qquad f'(x_0)=0$

ma $f'(x)$ non cambia segno in un intorno di x_0

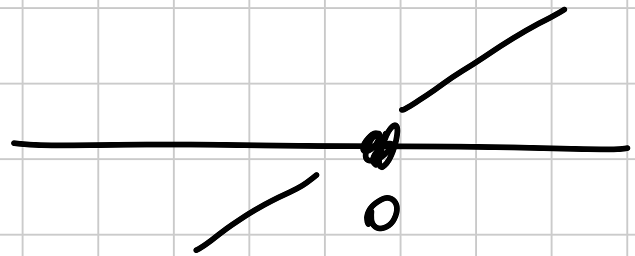
es.

$f(x) = x^3$ derivabile in $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x=0$ p.to stazionario

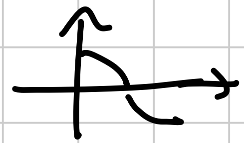
$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$x=0$ non è p.to di estremo locale

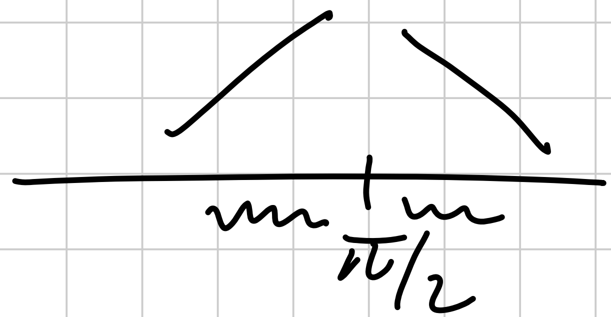


es. $f(x) = \operatorname{sen} x$ derivable in $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \cos x = 0$



$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ p.ti stazionari



$k = 0$ $x = \frac{\pi}{2}$

$f'(x) > 0$ $x < \pi/2$

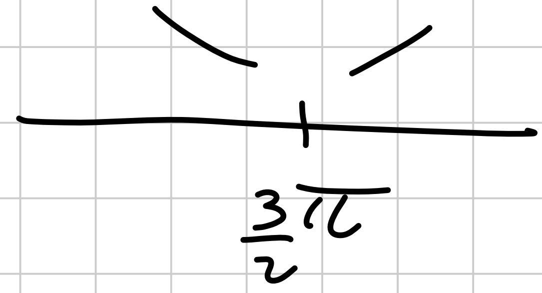
$f'(x) < 0$ $x > \pi/2$

$x = \pi/2$ p-to di max locale

$f(\pi/2) = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$

p.to di min. locale.



es. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

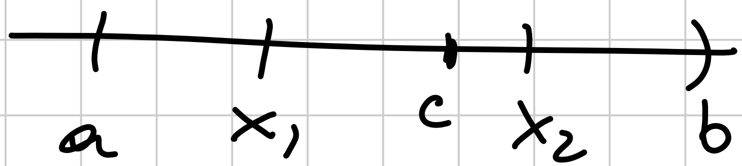
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ è strett. crescente su $\mathbb{R}$.

Funzioni a derivata nulle.

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b)

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \iff f$ è costante in (a,b)

<u>Dim.</u> $\Leftarrow$ banale



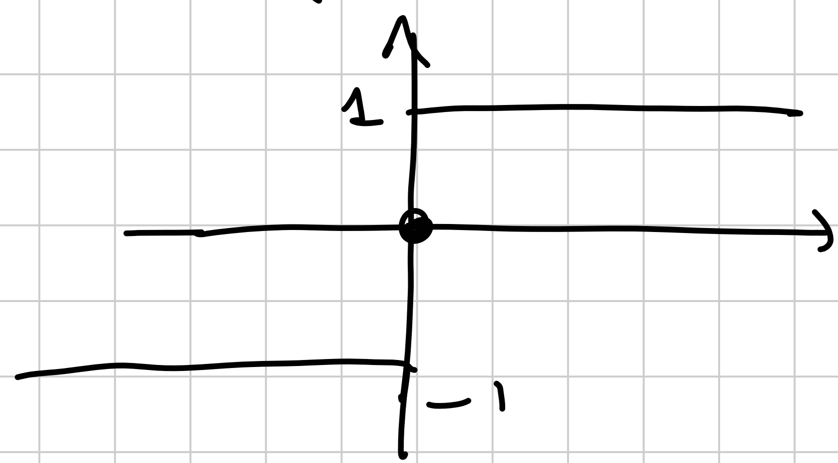
$\Rightarrow$ applico Lagrange

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \qquad c \in (x_1, x_2)$$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \Rightarrow f$ è costante in (a,b)

<u>oss.</u> È <u>necessario</u> che f sia derivabile in tutto (a,b)



$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

ma f <u>non</u> è costante

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ non è un intervallo ma l'$\cup$ di <u>due</u> intervalli

Applicazione f, g derivabili in (a,b)

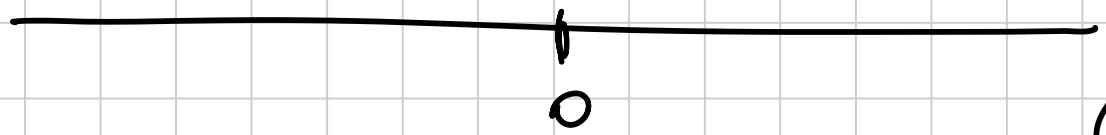
t.c. $f'(x) = g'(x), \ \forall x \in (a,b)$

$$\Longrightarrow f(x) = g(x) + \text{costante}$$

$$(f-g)' = f' - g' = 0$$

$$\Longrightarrow f - g = \text{cost.}$$

<u>Esempio</u> $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\quad \forall x \neq 0$



$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 0$$

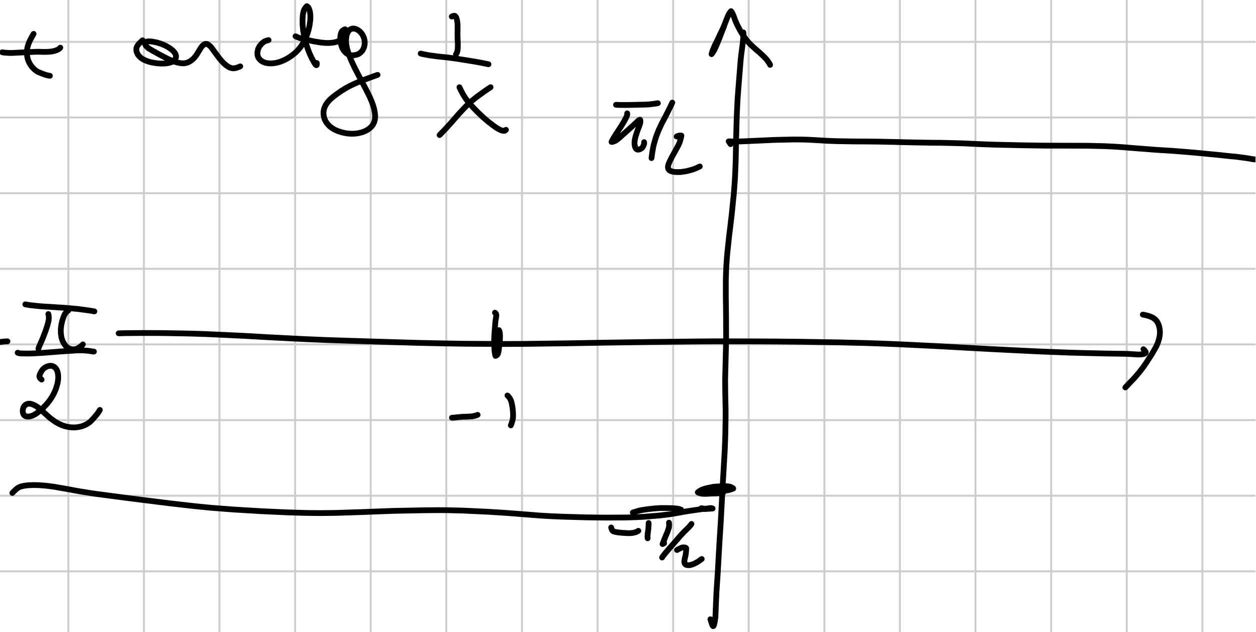
f <u>non</u> è costante $\forall x \neq 0$

$(-\infty, 0)$ $\quad f' = 0 \Rightarrow f$ è costante

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$x = -1$

$f(-1) = 2 \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2}$



$(0, +\infty)$ $\quad f' = 0 \Rightarrow f$ è costante

$x = 1$ $\quad f(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$

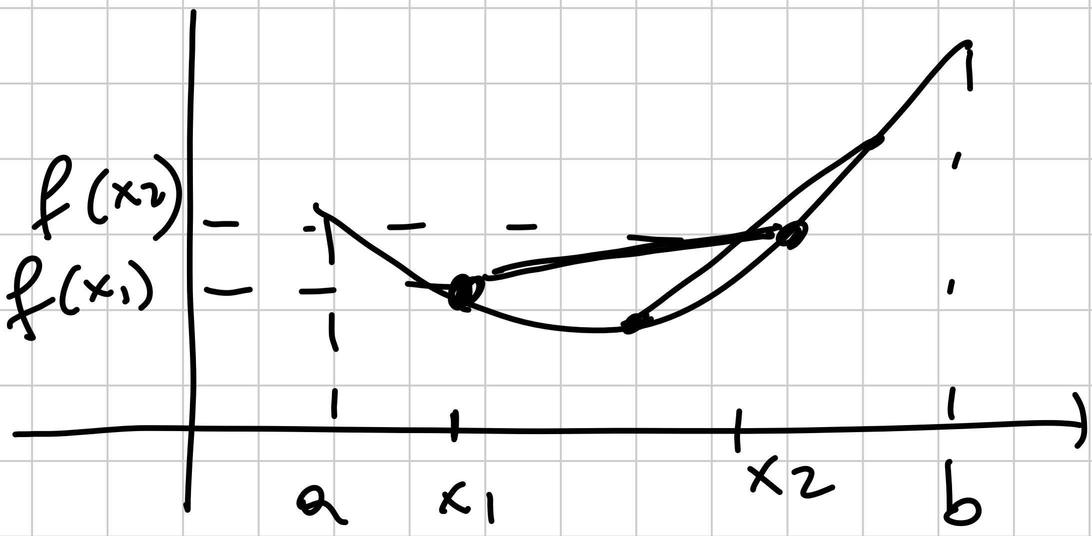
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

f' segno $\Longleftrightarrow$ monotonia di f.

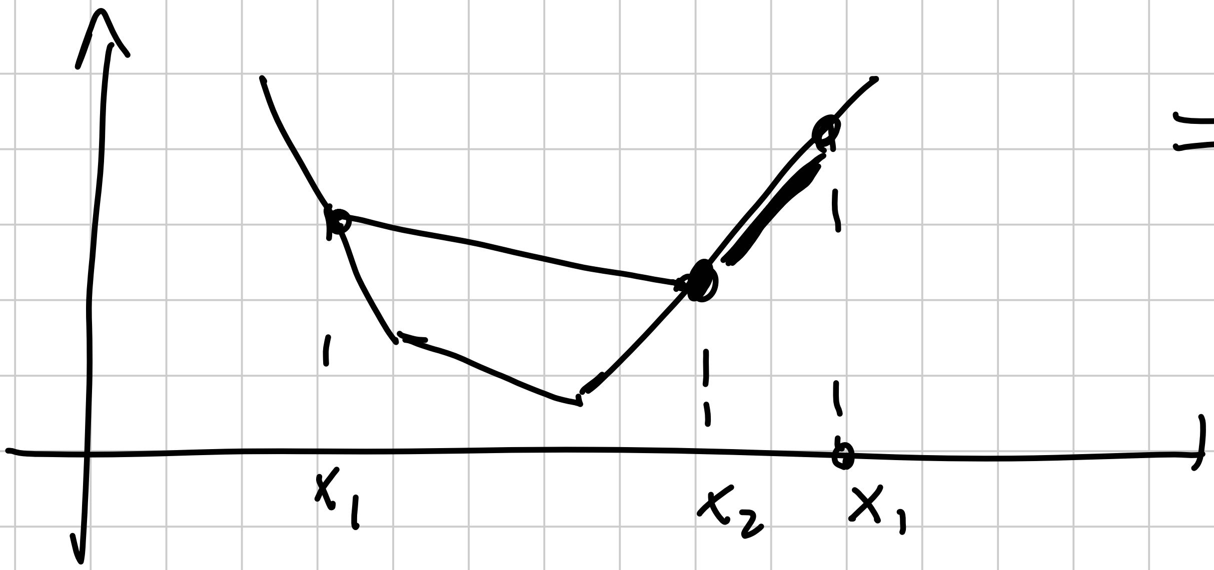
f'' segno $\Longleftrightarrow$ convessità di f

Funzioni convesse

Def. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f è **CONVESSA** se $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto il grafico di f. Se gli unici punti in comune col grafico sono gli estremi $\Rightarrow$ f è **strettamente convessa**



$\Rightarrow$ strett. convessa



$\Rightarrow$ convessa ma non strett. convessa.

f è convessa $\iff$ $f(x) \leq f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$f(x)$ sta sotto il segmento

Teo. f due volte derivabile in (a,b)

NO DIM.

f convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

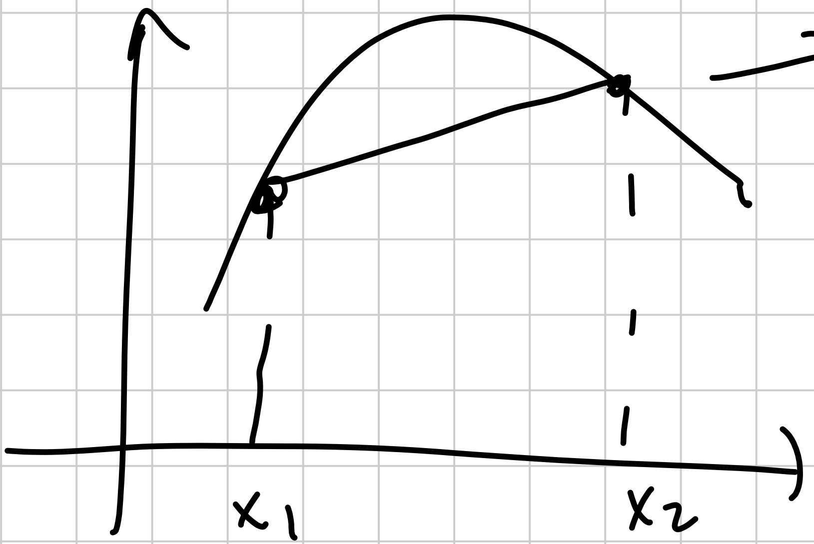
f concava $\iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

se $f'' > 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è strett. conv.

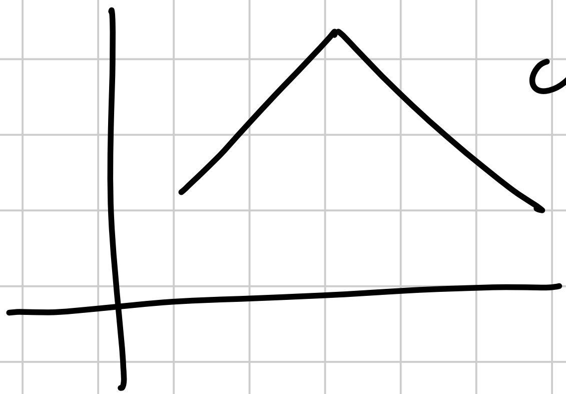
$f'' < 0 \Rightarrow$ " " concava

---

f è concava se $-f$ è convessa



$\rightarrow$ strett. concava



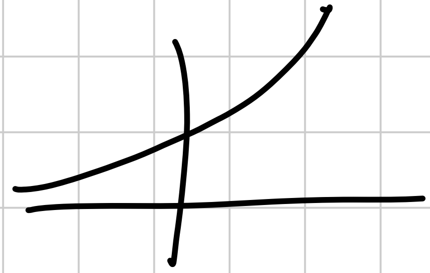
concava

esempi

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$\Rightarrow$ $f(x)$ è strett. convessa su $\mathbb{R}$

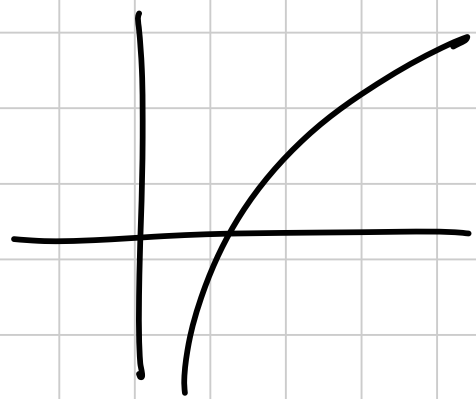
$f(x) = \log x$

$x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$\log x$ è strett. concava $\forall x > 0$



$f(x) = x^{\alpha}$ $\qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

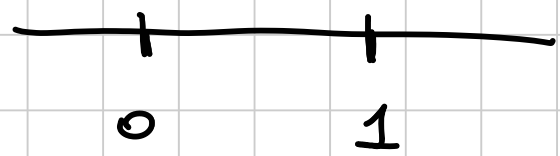
$x > 0$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)\underbrace{x^{\alpha-2}}_{>0}$$

$f''(x) > 0 \iff \alpha(\alpha-1) > 0 \iff \alpha > 1$

o

$\alpha < 0$



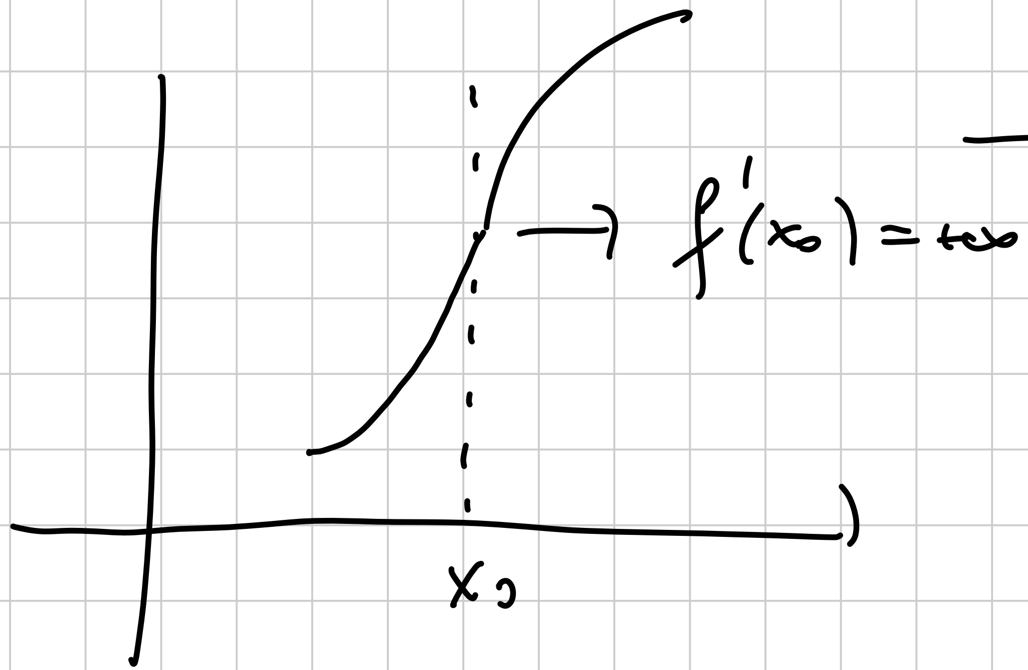
x^{α} strett. convesse

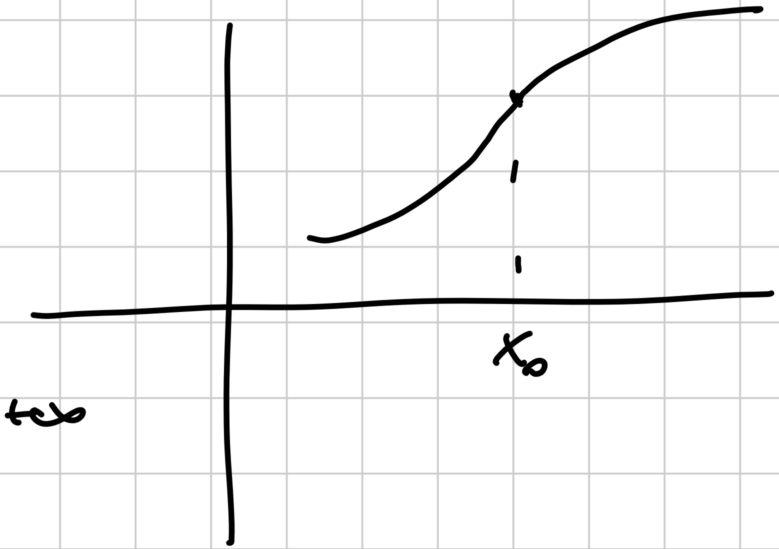
se $\alpha > 1$ oppure $\alpha < 0$

$\alpha \in (0,1) \Rightarrow$ strett. concava

Def. $x_0 \in (a,b)$ t.c. $\exists\ f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$
dico che x_0 è un p.to di flesso per f se $\exists$ un intorno di x_0 in cui f cambia concavità.

$f'(x_0) = +\infty$





Teo. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a,b)$ p.to di flesso, f derivabile due volte in x_0

$\Rightarrow f''(x_0) = 0$

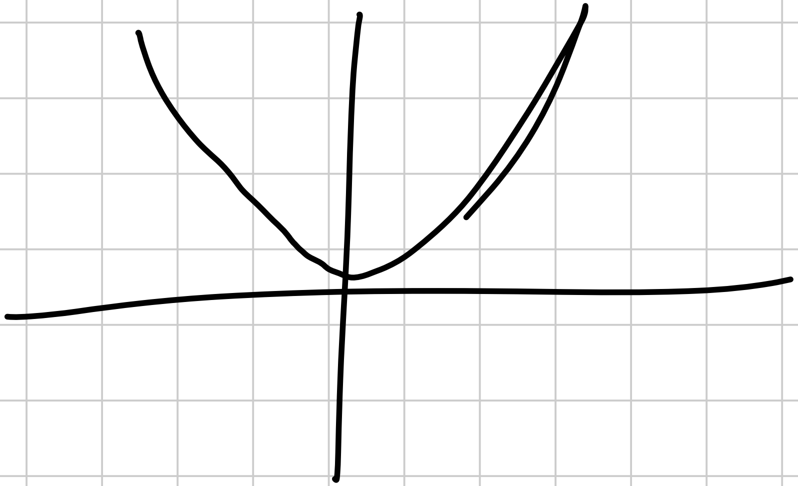
Dim. no

Oss. non vale il viceversa

$\cancel{\Leftarrow}$ se $f''(x_0) = 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; x_0$ è di flesso

$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$

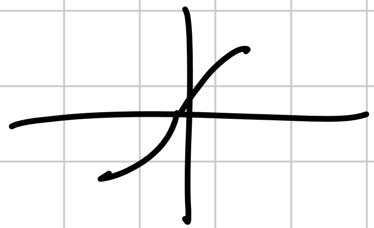
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ma $x=0$ **NON** è di flesso



f'' non cambia segno in un intorno di $x=0$.

Es. $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$



$\operatorname{sen} x = 0$ $\qquad x = k\pi$

$k = 0$ $\qquad x = 0$

$f'' > 0$ $\quad x < 0$ $\qquad f'' < 0$ $\quad x > 0$ $\qquad \Rightarrow x = 0$ p.to di flesso.

Altra applicazione di derivate:

il <u>teorema di De l'Hôpital</u> $\overset{(}{a} \quad \overset{\bullet}{x_0} \quad \overset{)}{b}$

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b)

se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)

se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ e

$\exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$

allora $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

<u>Dim</u> (diversa dal libro) $\underset{a}{(}\!\!\longrightarrow\!\!\underset{b}{)}$

nel caso che f' e g' sono continue da destra in a

$$f(a) = g(a) = 0$$

Poiché

$g'(x) \neq 0$ $\quad$ g è strett. monotona

$$g(a) = 0 \Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{(x-a)}{(x-a)}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'_+(a)}{g'_+(a)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\downarrow$

f' e g' sono continue in a

#

Es.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

se $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

$$= 0$$

$$\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{1/\cancel{x}}{-1/x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

<u>es.</u> $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$! \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1} \nexists$$

non posso applicare l'Hôpital.

Es.: $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2+x}{1+x^2} = \frac{3}{2}$

se la forma non è indeterminata non si applica

$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

__ES.__ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{\log(1+x) - x} = 2 \qquad \dfrac{0}{0}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x - e^x}{\dfrac{1}{1+x} - 1} \qquad \dfrac{0}{0}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} x - \cos x - e^x}{-\dfrac{1}{(1+x)^2}} = \dfrac{-2}{-1} = 2$