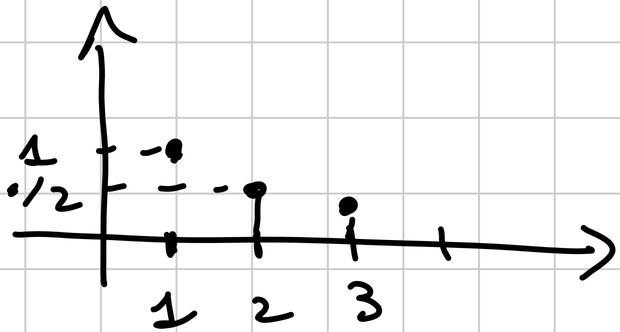
Limiti di successioni

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \longrightarrow a_n \qquad a(n)$$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione

es. $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \neq 0$



$$a_n = (-1)^n$$

$$a_n = \operatorname{sen} n$$

$\operatorname{sen} x$

$\{a_n\}$ successione

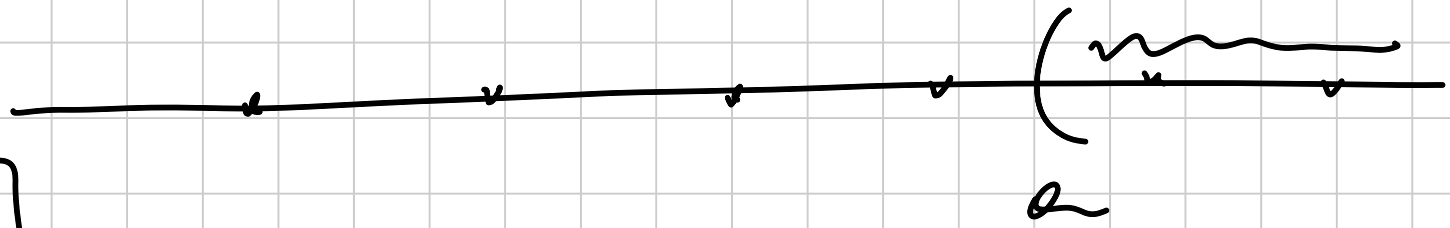
$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

$X = \mathbb{N}$

$n \to$ p.to di accumulazione per $\mathbb{N}$ l'unico p.to $\Rightarrow$ è $+\infty$

limiti di funzioni $x \to x_0$

x_0 p.to di accumulazione per X



$U = (a, +\infty]$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \quad \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{successione } \underline{\text{convergente}} \\ \pm\infty & \text{succ. } \underline{\text{divergente}} \\ \nexists & \text{succ. } \underline{\text{irregolare}} \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon \ \exists N \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon, \ \forall n > N}$$

$U = (N, +\infty]$ intorno di $+\infty$

$\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di $+\infty$ t.c. $f(x) \in V$, $x \in U$

Es.

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

successione geometrica

r^n (ragione)

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

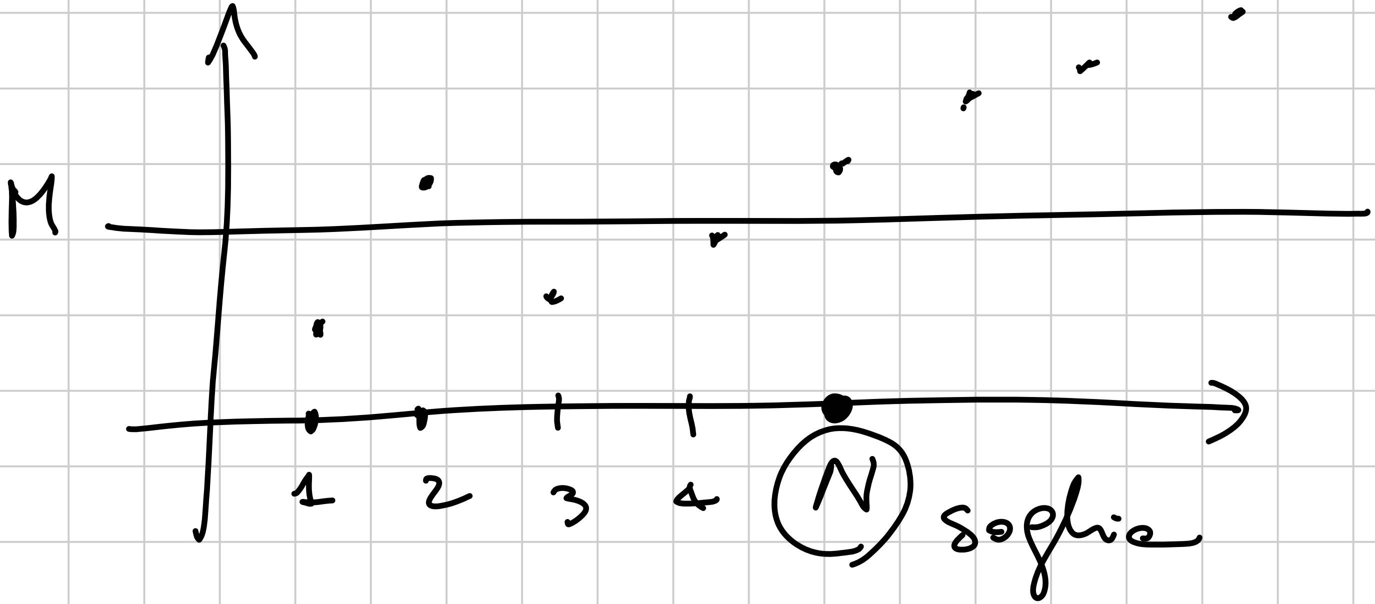
? $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad t.c. \quad \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon, \quad n > N$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \qquad 2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \quad N$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M\ \exists N \text{ t.c. } a_n > M,\ \forall n > N.$$



$$V = (M, +\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

fate voi!

$$V = [-\infty, M)$$

Proprietà dei limiti di successione

0) Unicità del limite

1) Permanenza del segno: $\lim_{n} a_n = l > 0$

$$\Longrightarrow a_n > 0 \,, \quad \forall n > N$$

2) $\{a_n\}$ è convergente $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ è limitata

$$(\, |a_n| \leq M \,)$$

$$\not\Longleftarrow$$

es: $a_n = (-1)^n$ $\begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$|a_n| \leq 1$ limitata ma irregolare

es. $a_n = \operatorname{sen} n$

$|a_n| \leq 1$ ma è irregolare (lo dimostreremo).

oss. sulla permanenza del segno.

$a_n > 0 \implies l \geq 0$ (no $l > 0$)

es. $a_n = \frac{1}{n} > 0$ e $l = 0$

3) Teorema del <u>confronto</u>

$a_n \leq b_n \leq c_n$, per $n > N$

$a_n \to l$
$c_n \to l$ $\Longrightarrow$ $b_n \to l$

in particolare

$a_n \leq b_n$ e $a_n \to +\infty$

$\Longrightarrow b_n \to +\infty$

$a_n \leq b_n$ e $b_n \to -\infty$

$\Longrightarrow a_n \to -\infty$

$a_n \leq b_n \qquad (b_n - a_n \geq 0)$

$a_n \to l_1 \qquad \Longrightarrow \quad l_1 \leq l_2$

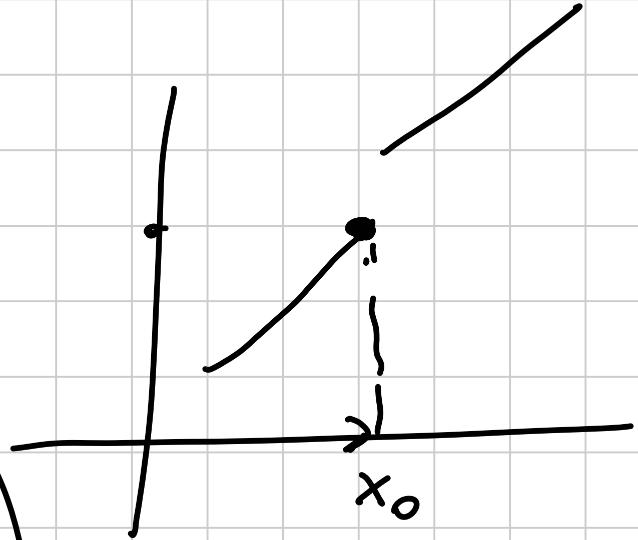
$b_n \to l_2$

(teo. della permanenza del segno).

4) Teoremi di calcolo dei limiti

5) Esistenza del limite per <u>successioni</u> monotone

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f$$



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

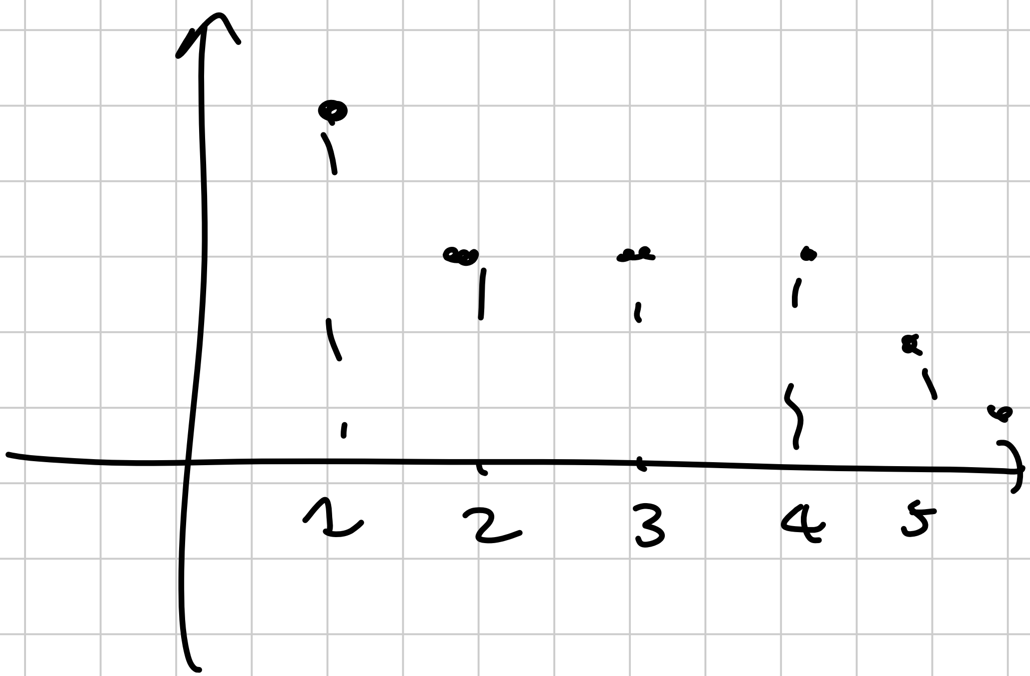
a_n crescente

$\exists$ sempre il limite di una successione <u>monotona</u>

Def. $\{a_n\}$ è crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

è decrescente se

$a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$



__Teo.__ Una successione crescente $\{a_n\}$ ha sempre limite (finito o infinito) e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{\mathbb{N}} a_n \begin{cases} +\infty \\ \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(non è <u>mai</u> irregolare)

Analogamente $\{a_n\}$ è decrescente

$$\lim_{n} a_n = \inf_{\mathbb{N}} a_n \begin{cases} -\infty \\ \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\{a_n\}$ crescente

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n$$

ℓ $\qquad$ $\cancel{+\infty}$

se $\{a_n\}$ è limitata $\Rightarrow \sup a_n = \ell$

$$\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

$\{a_n\}$ monotòna e limitata $\Rightarrow$ <u>convergente</u>

Esercizio Dimostrare che $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ è strettamente crescente

Ts. $a_{n+1} > a_n$, $\forall n$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{n}{n+2}$$

? $\frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1}$?

$$n(n+1) > (n+2)(n-1)$$
$$\cancel{n^2} + \cancel{n} > \cancel{n^2} - \cancel{n} + \cancel{2n} - 2 \quad \forall n$$

vero!

Es. Successione geometrica di ragione r

$$a_n = r^n$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

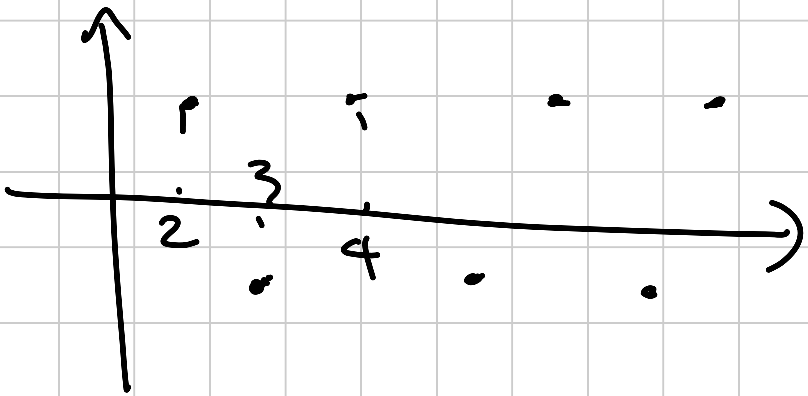
è strett. decrescente $\quad x = n$

$$a_{n+1} < a_n$$

$$? \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{n}+1} < \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \implies \frac{1}{2} < 1$$

ok!

Es. $a_n = (-1)^n$ è irregolare!

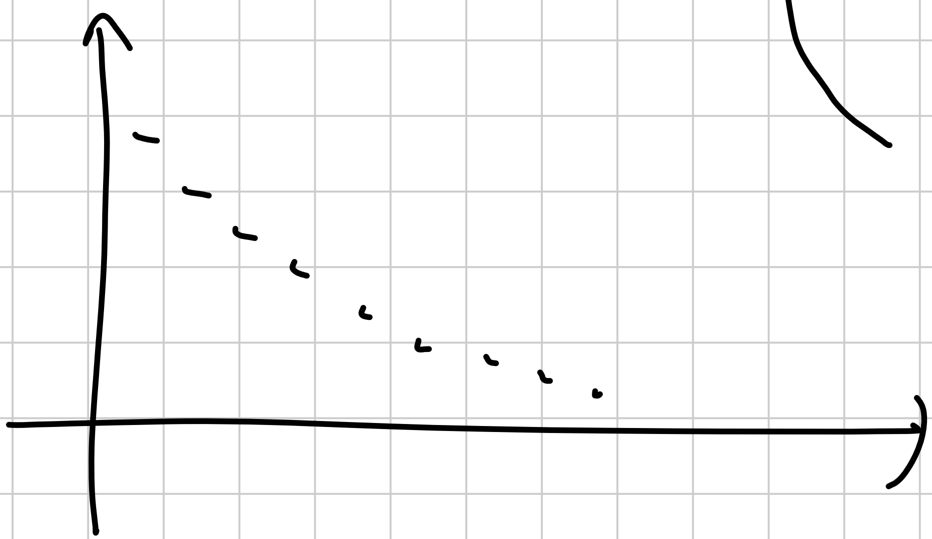


non è monotòna.

Es.

$$a_n = r^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ 1, & r = 1 \\ \nexists & r \leq -1 \\ +\infty & r > 1 \end{cases}$$



$$(-5)^n$$

Limiti di successioni.

$\{b_n\}$ **Sottosuccessione** di $\{a_n\}$ se
$b_n = a_{k_n}$, $\underbrace{k_n \in \mathbb{N}}$

es. $a_n = \dfrac{1}{n}$

$b_n = \dfrac{1}{2n}$ — sotto successioni

n pari $2n$

dispari $2n+1$

$c_n = \dfrac{1}{2n+1}$

Teo. Una successione a_n ha limite $l \in \mathbb{R}^*$ sse ogni sua sotto-successione ha limite l

$\Longleftrightarrow$

$\Rightarrow$

es. $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{2n} \to 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} \to 0$

Questo teorema serve per dim. che una successione $\{a_n\}$ non ha limite.

Se trovo due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ che convergono a limiti diversi allora $\{a_n\}$ non ha limite.

es. $a_n = (-1)^n$ è irregolare

$$b_n = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$$

$$c_n = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$$

$$\Longrightarrow \nexists \lim_n (-1)^n$$

<u>es.</u> $$a_n = \cos(\pi n) \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\nexists \lim a_n$.

$$b_n = \cos(\pi \cdot 2n) = 1 \to 1$$

$$c_n = \cos(\pi(2n+1)) = -1 \to -1$$

$\nexists \lim a_n$.