Infinitesimi, infiniti, confronti

$f, g \to 0 \qquad x \to x_0$

1) $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0$

si dice che f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g, $x \to x_0$

$f = x^5$

$g = x^3 \qquad x \to 0$

$\frac{f}{g} = \frac{x^5}{x^3} = x^2 \to 0$

$\frac{g}{f} = \frac{1}{x^2} \to +\infty$
$x \to 0$

oss. se $\frac{f}{g} \to 0$

$\frac{g}{f} \to \pm\infty$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \cdot x} \, x = 0$

$f = 1-\cos x$
$g = x$

$\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$

$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \right)$

$1/2$

$1-\cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a x

$x \to 0$

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, $l \in \mathbb{R}$

f e g sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$

es. $f(x) = 3x^2$

$g(x) = 5x^2$ $\quad x \to 0$

$$\frac{f}{g} = \frac{3\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}} = \frac{3}{5} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{3}{5}$$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1 - \cos x$ è infinitesimo dello stesso ordine di x^2

$x \to 0$

Oss. $f \to 0$, è utile prendere come $g(x) = x^\alpha$, $x \to 0$,

$f \qquad x^\alpha \;/\; \lim_{x\to 0} \frac{f}{x^\alpha} \to \ell \neq 0$

Def. Se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \ell \neq 0$ per un α

dico che f è infinitesimo di ordine α, $x \to 0$.

$f(x) = 1 - \cos x$ ha ordine 2 di infinitesimo infatti: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

es. $f(x) = \arcsin x$ è infinitesimo di ordine 1, $x \to 0$

solo x^1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x \cdot x} = \pm\infty$$

$\nearrow 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} \sqrt{x} = 0$$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ dico

$f \sim g$ per $x \to x_0$

(f è "asintotica" a g)

<u>oss.</u>

se $\frac{f}{g} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ $\qquad \frac{f}{\ell g} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

f e ℓg sono asintotiche

<u>es.</u> $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\qquad \operatorname{sen} x \sim x$
$x \to 0$

es. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 \quad , \quad x\to 0$

es. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$e^x - 1 \sim x \quad , \quad x\to 0$

es. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad , \quad x\to 0$

$$\sqrt[15]{(1+x)} - 1 \sim \frac{1}{15}x \qquad x \to 0$$

Definizione di "o piccolo"

se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$$

f è un "o piccolo" di g.

<u>es.</u> $1 - \cos x = o(x)$, $x \to 0$

$$\frac{1-\cos x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

<u>oss.</u> se $f, g \to 0$ significa che f è

infinitesimo di ordine superiore a g

$$1-\cos x = o(x), \quad x \to 0$$

es. $$x^5 = o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

oss $$f(x) = o(1), \quad x \to x_0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad g(x) = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Altro modo di scrivere i limiti notevoli

0) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$$

$$\operatorname{sen} x - x \underset{x \to 0}{=} o(x)$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{=} x + o(x)}$$

1) $\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{\sim} x$

2) $\operatorname{sen} x$ è un infinitesimo di ordine 1, $x \to 0$

3) $\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \iff \boxed{\operatorname{sen} x = x + o(x) \quad x \to 0}$$

a $o\,x$ $\Rightarrow$ funzione

a $d\,x$ $\Rightarrow$ x + un' informazione (qualcosa che va a zero più velocemente di x)

ES. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad f = o(g) \Leftrightarrow \lim \frac{f}{g} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos x) - x^2}{2x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x) - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0$$

$$1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - o(x^2)$

$x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

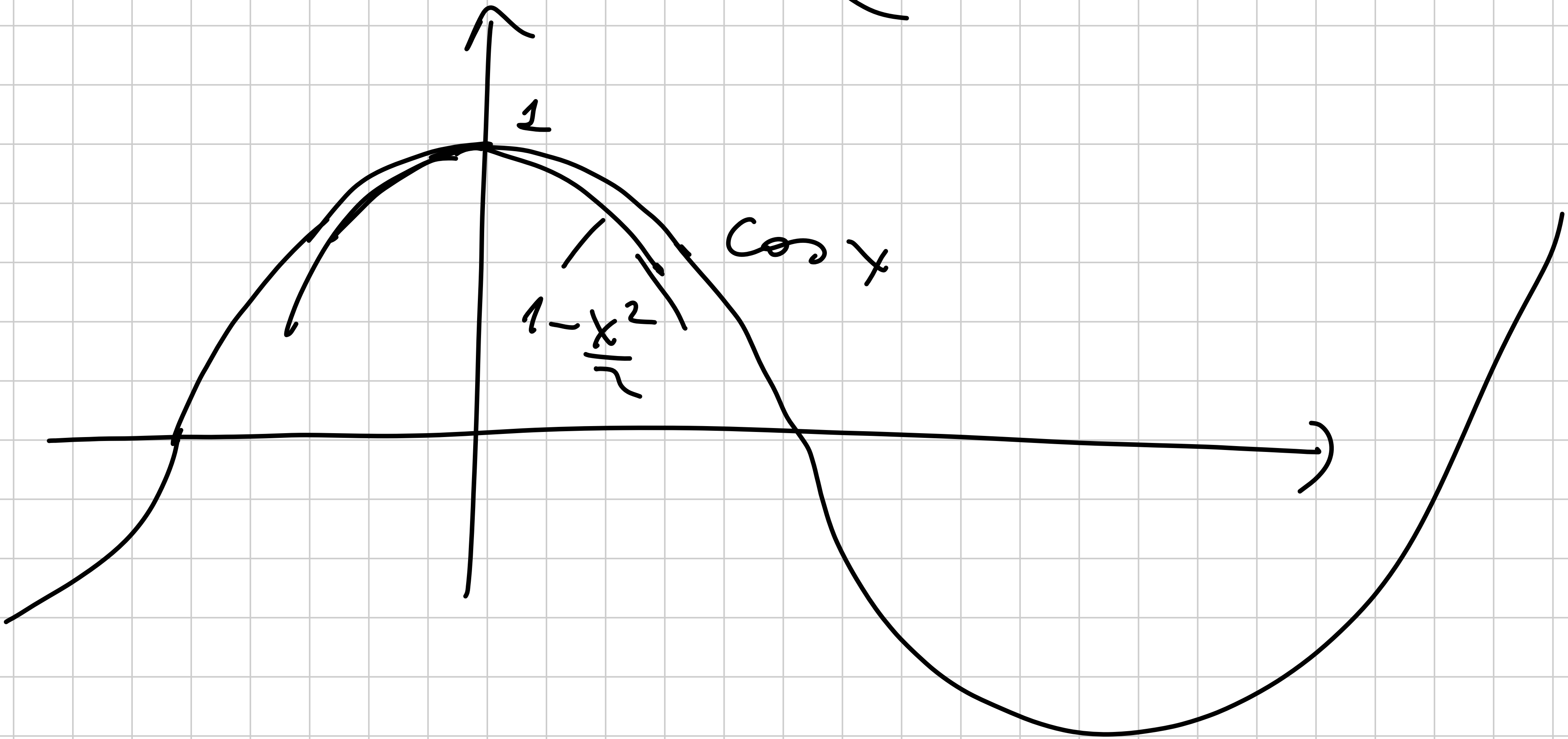
è un'informazione

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}, \quad x \to 0$$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \frac{1}{2}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$$



Infiniti

$f, g \to \pm\infty \quad , \quad x \to x_0$

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\quad$ $g(x)$ è infinito di ordine superiore rispetto a $f(x)$, per $x \to x_0$

(analog. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \pm\infty$)

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \quad , \quad l \in \mathbb{R}$

f e g sono infiniti dello stesso ordine.

Esempi: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5}{3x+1} = +\infty$

x^2+5 è infinito di ordine superiore rispetto a $3x+1$, $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^8 - 5}{2x^8+3x+6x^6} = \frac{1}{2}$$

sono infiniti dello stesso ordine
(ordine 8)

<u>oss.</u> Non sempre f e g possono essere confrontabili

$$f(x) = x(2+\sin x) \to +\infty \quad / \quad x \to +\infty$$

$$g(x) = x \to +\infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2+\sin x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \nexists$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{2+\sin x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \nexists$$

f e g <u>non</u> sono confrontabili

Def. $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$

se $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \ell \neq 0$

$\alpha > 0$

dico $f(x)$ è infinito di ordine α, $x \to +\infty$

Es. $f(x) = x^8 - 3x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} + e^{-x}$

$x \to +\infty$

$f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$

Qual è l'ordine di infinito di f?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^8} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x^7} + \frac{\operatorname{sen} x}{x^9} + \frac{e^{-x}}{x^8} = 1$$

8 è l'ordine di infinito di f $x \to +\infty$

può anche essere 7 o 9 ? No!

Es. $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad a > 1$

Domanda: $\exists\, \alpha$ t.c.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \ell \neq 0 \; ? \quad \text{No!}$$

$$= +\infty$$

a^x è infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di x (x^α).

$\cancel{\frac{a^x}{x^\alpha} \to l \neq 0}$

Mai!

es.- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$\nexists \alpha$ t.c. $\lim \frac{\log x}{x^\alpha} = l \neq 0$

es. Trovare l'ordine di infinitesimo di

$$f(x) = x \operatorname{sen} x + x^3 \log(1+x), \qquad x \to 0$$

Devo trovare α :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{\cancel{x} \operatorname{sen} x}{x^2} + \overbrace{\frac{\cancel{x^3} \log(1+x)}{\cancel{x^2}}}^{\to 0} \to 1$$

provo con $x \quad x^3 \quad 1$