Serie numeriche

Cerco di dare un significato alla somma (formale) di un numero infinito di termini.

<u>Es.</u> $a_k = \frac{1}{k}$ $\qquad k = 1, 2, \dots$

$a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

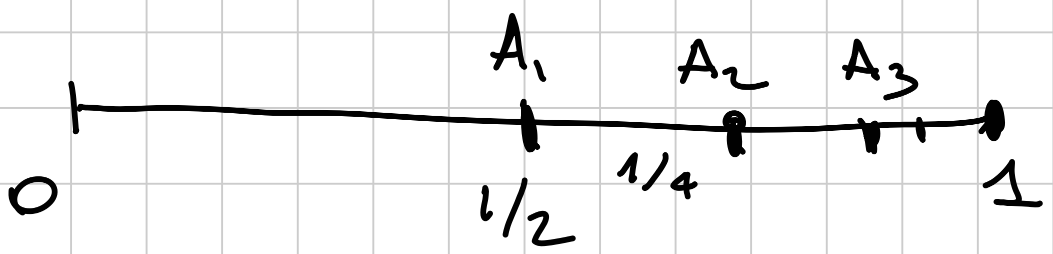
$\vdots$

$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = \dots$ somma di un numero finito di termini

$\Downarrow$

? $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} + \dots$?

Paradosso di Zenone



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \qquad 2$$

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \qquad \text{per arrivare ad } A_2$$

$$= 2 - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2^2} \qquad \text{ad } A_3$$

$$= 2 - \frac{1}{2^3}$$

Def. $\{a_k\}$ successione di numeri reali

Costruisco un'altra successione

S_n (ridotta n-esima o somma parziale)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Somma finita di n numeri reali

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} a_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$ è una successione

$$\lim_{n \to +\infty} S_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$ serie di a_k

S_n si chiama <u>successione</u> delle <u>ridotte</u> n-esime o delle somme <u>parziali</u>.

Es. $a_k = \frac{1}{k}$ $\qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2} =$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

$\vdots$

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

successione delle ridotte

$$\lim_n s_n =: \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Def $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_n s_n$

1) se $\lim_n s_n$ esiste finito $\Rightarrow$ serie è <u>convergente</u>

2) se $\lim_n s_n$ è $\pm\infty$ $\Rightarrow$ serie è <u>divergente</u>

3) se $\lim_n s_n$ $\nexists$ $\Rightarrow$ serie è <u>indeterminata</u>

Studiare il carattere di una serie $\Rightarrow$ dire se è conv., div., indet.

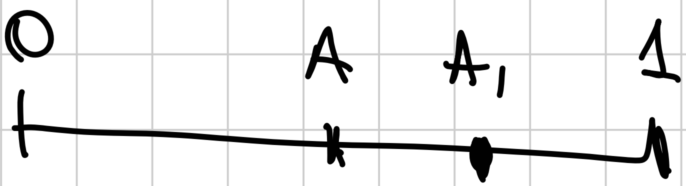
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Longrightarrow s_n \Rightarrow \lim_n s_n$

$a_k \rightarrow$ termini della serie

$s_n \rightarrow$ termini della successione.

$a_k \longrightarrow S_n$

<u>OSS.</u> non sempre si riesce a scrivere S_n esplicitamente

<u>Es.</u> 

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{a_k}$$

$S_0 = 1$

$S_1 = a_0 + a_1 = 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \longleftrightarrow S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) = 2$$

$\exists$ finito $\lim S_n \Longrightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$

è convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

Es. $\sum_{k=0}^{+\infty} k$ $\qquad a_k = k$

$S_0 = 0$

$S_1 = 0 + 1 = 1$

$S_2 = 1 + 2$

$S_3 = 1 + 2 + 3$

$\vdots$

$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_n S_n = \lim_n \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$

la serie <u>diverge</u>.

<u>Es.</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \qquad a_k = (-1)^k$

$S_1 = -1$

$S_2 = -1 + 1 = 0$

$S_3 = S_2 + a_3 = 0 - 1 = -1$

$S_4 = S_3 + a_4 = -1 + 1 = 0$

$$S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$\lim_n S_n \nexists \Rightarrow$ la serie $\sum (-1)^k$ è <u>indeterminata</u>

La serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \qquad a_k = q^k \text{ , } q \text{ ragione} \quad q \in \mathbb{R}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

se $q \neq 1$

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \stackrel{?}{=} 1 - q^{n+1}$$

$$1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots - \cancel{q} - \cancel{q^2} + \dots - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

$$\sum q^k \text{ converge} \iff \exists \text{ finito } \lim_{n} \underbrace{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{S_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

$q = 1$, $q = -1$

$$\sum q^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

$$S_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n+1$$

$$\lim_n S_n = \lim_n (n+1) = +\infty$$

$q = -1$ $\quad \sum (-1)^k$ è indeterminata

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \quad , \quad q \in \mathbb{R}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad , \quad q \neq 1$$

$$S_n = n+1 \quad , \quad q = 1$$

$$\lim_{n} S_n \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \Rightarrow \underline{\text{la serie diverge}} \\ \dfrac{1}{1-q} & |q| < 1 \Rightarrow \underline{\text{la serie converge}} \\ \nexists & q \leq -1 \Rightarrow \underline{\text{la serie è indeterminata.}} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \text{conv. a } \dfrac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \text{divergente } (+\infty) & q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & q \leq -1 \end{cases}$$

<u>Es.</u> $q = \frac{1}{2}$ $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ la serie converge

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

<u>Es.</u> $\sum_{k=0}^{+\infty} (-5)^k$ $\quad q = -5 < -1$

la serie è indeterminata

__Es.__ $\sum_{k=0}^{+\infty} e^k \qquad q = e > 1$

è __divergente__

Attenzione agli __indici__

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad s_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Quindi

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \ldots$$

<u>OSS.</u> Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge allora converge anche $\sum_{k=\ell}^{+\infty} a_k$ ma la somma della serie è diversa.

<u>Altro esempio</u> in cui si può calcolare <u>esplicitamente</u> S_n.

<u>Es.</u> $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \qquad a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

serie telescopiche

$$s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + a_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$ la serie converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Serie telescopiche

$$\sum \left(b_k - b_{k+1} \right)$$

$$S_n = b_0 - b_{n+1}$$

<u>es.</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\log(k+1) - \log k\right)$$

$S_1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$

$S_2 = \cancel{\log 2} + \log 3 - \cancel{\log 2}$

$S_3 = \cancel{\log 3} + \log 4 - \cancel{\log 3}$

$\vdots$

$S_n = \log(n+1) \to +\infty$

la serie <u>diverge</u>!

se $\sum a_k$ conv.
$\sum b_k$ conv. $\Rightarrow \sum (a_k + b_k)$ converge

e $\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$

se $\sum a_k$ conv. $\Rightarrow \sum (\lambda a_k)$ convergente

$$\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k$$

es. $\sum 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = 3 \sum \left(\frac{1}{5}\right)^k$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim s_n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

successione delle ridotte

s_n

serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = ?\dots?$$

se non riusciamo a calcolare esplicitamente s_n servono dei "criteri di convergenza"

Condizione <u>necessaria</u> per la convergenza di una serie.

<u>Teo.</u>

Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è convergente $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

<u>Dim.</u> per ipotesi $\exists$ finito

$$\lim_{n} s_n = s$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\lim_{n} a_n = s - s = 0$$

#

Se $\lim_{k} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ <u>non</u> è <u>convergente</u>

<u>Es.</u> $\sum_{k=0}^{+\infty} k$ è convergente ?

$\boxed{a_k = k}$

$\lim_{k \to +\infty} k = +\infty$

non è zero!

NO!,

non è verificata la condizione necessaria di conv. di una serie.

es.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \qquad \text{non converge}$$

$$a_k = 3^k \longrightarrow +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \qquad a_k = (-1)^k \xrightarrow[k]{} \nexists$$

o

<u>OSS.</u> la condizione $\lim_k a_k = 0$ è <u>SOLO</u> una condizione <u>necessaria</u> per la convergenza di una serie, <u>non</u> è condizione <u>sufficiente</u>

se $\sum a_k$ conv. $\Rightarrow \lim_k a_k = 0$

ma se $\lim_k a_k = 0 \not\Rightarrow \sum a_k$ conv.

<u>es.</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\quad a_k = \frac{1}{k}$

$\lim_k \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow$ non si può dedurre se la serie converge o no!

Riassunto

Se $\lim_{k} a_k \neq 0 \implies \sum a_k$ **non** converge.

Se $\lim_{k} a_k = 0 \implies$ non si può dire nulla sulla conv. della serie

<u>Es.</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ diverge.

$$\lim_{k} a_k = \lim_{k} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0$$

ma la serie <u>diverge</u>!

Quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \qquad S_n$$

$$\sum_{u=0}^{+\infty} a_u \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$$

$$\sum_{h=0}^{+\infty} a_h \qquad S_n = \sum^{n} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

<u>1ª cosa</u>

$$\lim_{k \to +\infty} a_k \begin{cases} \neq 0 & \text{la serie non converge} \\ = 0 & ? \end{cases}$$

criteri di convergenza

<u>Es.</u> $$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{1/k}$$

$$\lim_{k} a_k = 1 \neq 0$$

la serie non <u>converge</u>.

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \qquad p \in \mathbb{R}$$

$p = 1$ $\quad \sum \frac{1}{k}$ $\quad$ serie armonica

$p = 2$ $\quad \sum \frac{1}{k^2}$

$p < 0$ $\quad a_k \to +\infty$ $\quad$ la serie non converge

$a_k = 1 \to 1$ $\quad$ ||

$$\sum \frac{1}{k^p} = \begin{cases} \text{convergente se } p > 1 \\ \text{divergente se } p \leq 1 \end{cases}$$

non si dim.

Es. $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente

$\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergente

Il caso delle serie a <u>termini positivi</u>

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \qquad a_k > 0$$

$$\sum \frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k} > 0 \qquad \sum (-1)^k \quad \text{no!}$$

$$\sum \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{a_k > 0}$$

$$\sum \frac{1}{k^p}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad , \quad a_k > 0$$

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0} > S_n$$

$S_{n+1} > S_n \quad , \forall n$

S_n la successione delle ridotte è monotòna (crescente)

$\lim_n S_n$ <u>esiste</u> <u>sempre</u> $\begin{cases} \text{finito} \\ +\infty \end{cases}$

quindi la $\sum a_k$ non può mai essere indeterminata

è sempre o convergente o divergente.