$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

Sommatorie

$$\sum_{K=1}^{n} K = 1 + 2 + \ldots n$$

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_K = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n$$

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{n}{n+1} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Cambio di indice.

$$j + 1 = n$$

$$j = n - 1$$

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{j}{j+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{n-1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad P_n$$

Voglio dimostrarlo con il principio di induzione.

$1+2+3+\dots+n$

1) $n=1$ $\quad n_0 = 1$ $\quad$ è vera?

$$1 = \frac{1\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 1 \quad \text{vero!}$$

2) $\underline{Hp.}$ P_n è vera $\overset{\underline{Ts}}{\Rightarrow}$ P_{n+1} è vera

$$? \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; ?$$

$$? \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\displaystyle \overset{\shortparallel}{\frac{n(n+1)}{2}}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$\Rightarrow$ ipotesi di induzione

P_n è vera!

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{P_{n+1}}$$

Disuguaglianze di Bernoulli

$(1+h)^n \geq 1+hn, \quad \forall h > -1, \ h \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

es $(1+h)^{100} \geq 1 + 100h$

1) $n_0 = 0 \qquad 1 \geq 1$ vero!

2) P_n è vero $\Rightarrow P_{n+1}$ è vero

Hp. $(1+h)^n \geq 1+hn \Rightarrow$ Ts. $(1+h)^{n+1} \geq 1+h(n+1)$

$(1+h)^{n+1} = \underbrace{(1+h)^n}_{\geq (1+hn) \text{ x ipotesi di induzione}} \cdot (1+h) \geq (1+hn)(1+h) =$

$= 1+h+hn+\underbrace{h^2 n}_{\geq 0} \geq$

$\geq 1+h+hn =$

$= 1+h(n+1)$

$n!$ **Fattoriale** $n \in \mathbb{N}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

rappresenta le disposizioni di n oggetti

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$1! = 1$

$0! = 1 \rightarrow$ Definizione

Coefficiente binomiale

$n, K \in \mathbb{N}$ $K \leq n$

di indice n e K

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

es. $$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 6$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}$$

Formule del binomio di Newton

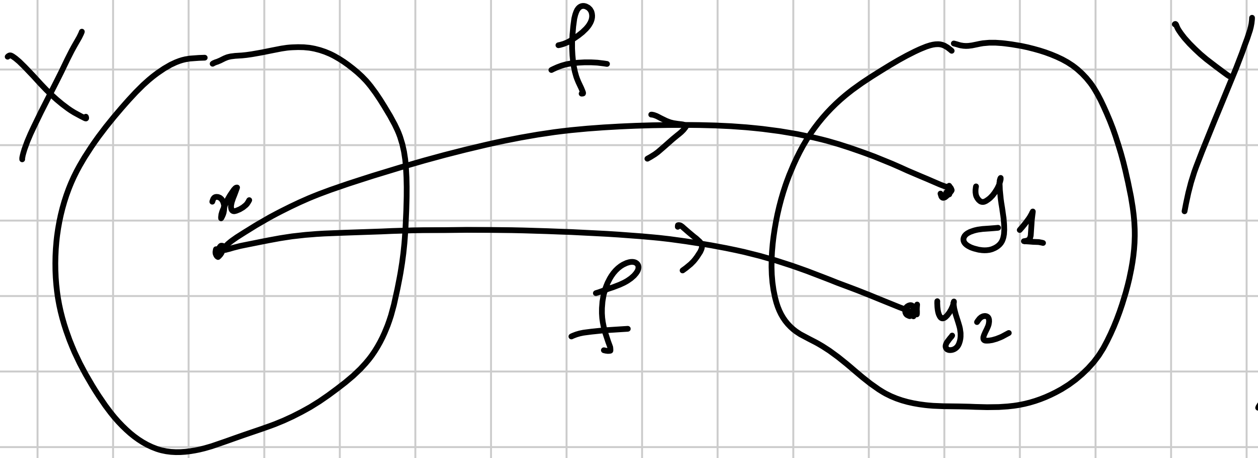
$\forall n \in \mathbb{N}$

$n = 2$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

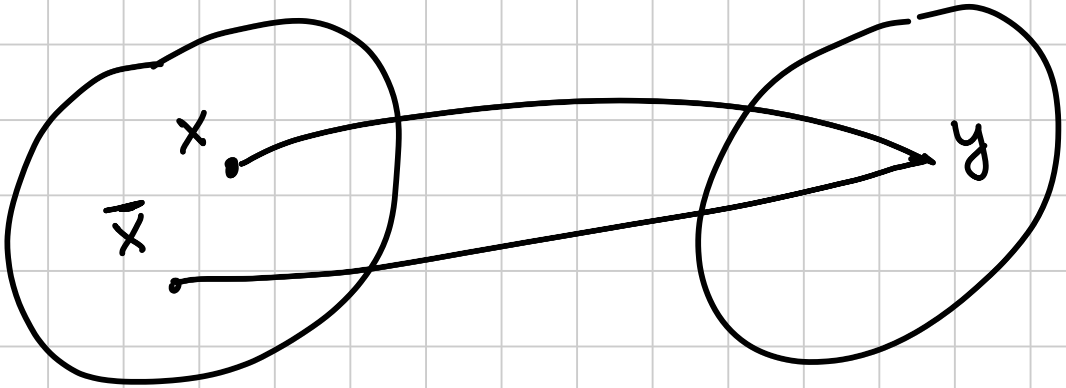
Cap. 2 FUNZIONI

Def. X, Y insiemi non vuoti. Una funzione f da X a Y è una corrispondenza che associa ad ogni $x \in X$ uno e uno solo elemento $y \in Y$.



non è una funzione

X = dominio di f
dom f



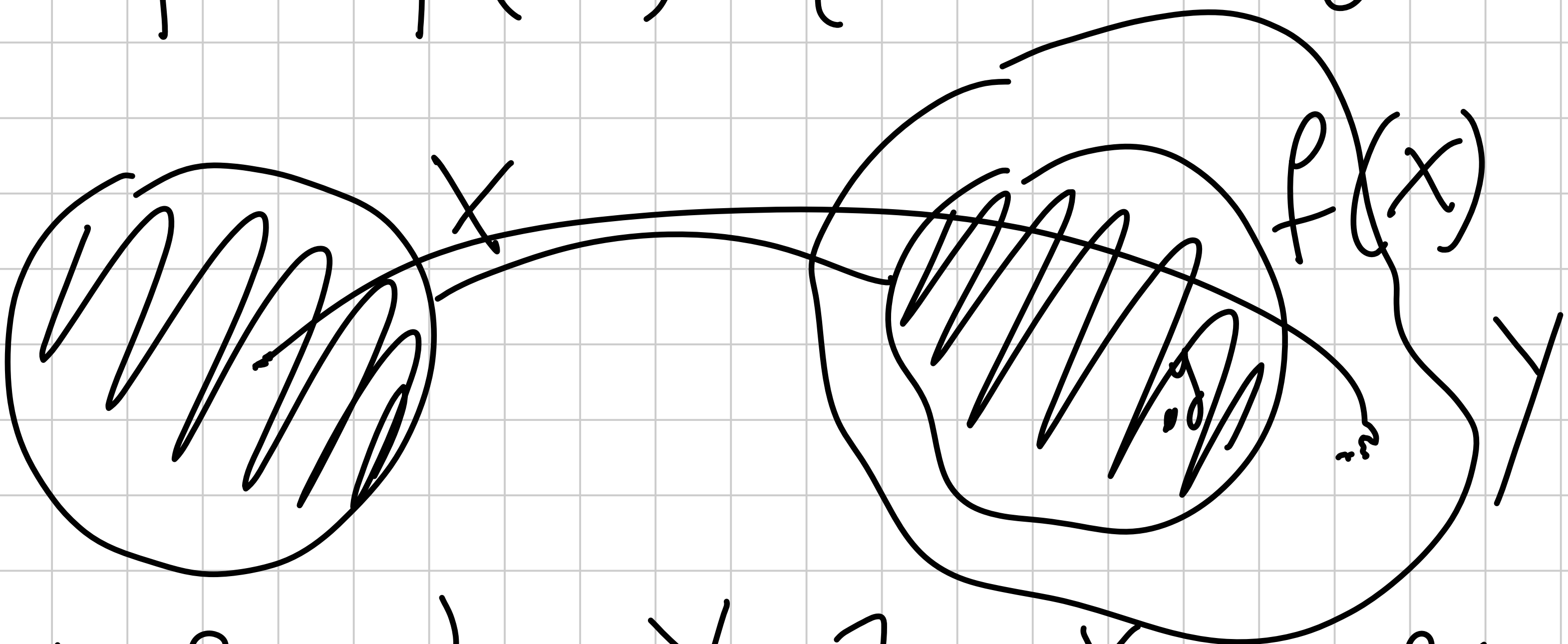
Y = codominio

y valore delle funzioni in x

$y = f(x) \quad , \quad x \in X \quad , \quad y \in Y$

$\text{graf } f := \{ (x, f(x)), \ x \in X \}$ grafico di f

$\text{im} f = f(X) = \{ f(x), \ x \in X \} \subseteq Y$



$\text{im} f = \{ y \in Y : \exists \, x \in X, \ y = f(x) \}$

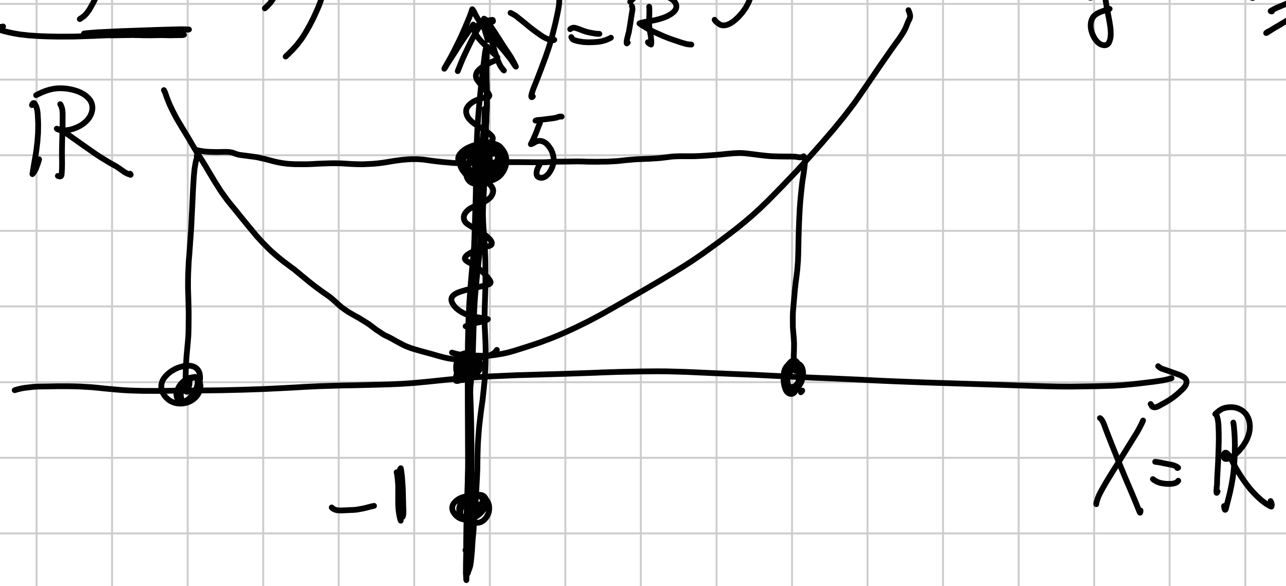
Una funzione si indica così:

$$\begin{cases} f: X \longrightarrow Y \\ \quad x \longrightarrow y \end{cases} \qquad \begin{cases} f: X \to Y \\ y = f(x) \end{cases}$$

es. $\begin{cases} f: \overset{X}{\mathbb{R}} \to \overset{Y}{\mathbb{R}} \\ y = x^4 = f(x) \end{cases}$ $\qquad \text{im} f = [0, +\infty)$

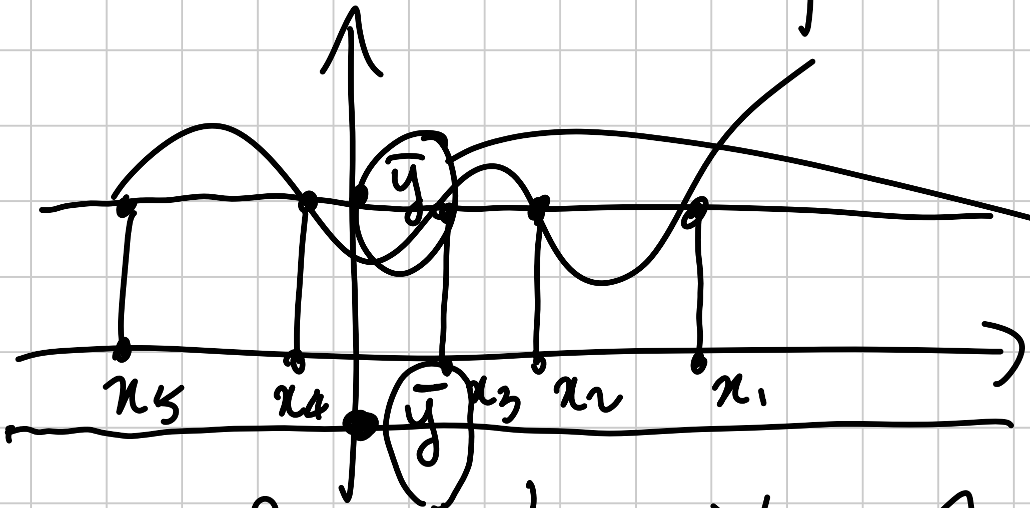
graf $f = \{ (\underline{x, x^4}), \ x \in \mathbb{R} \}$ $\qquad y = x^4 \geq 0$

X, Y sono $\mathbb{R}$



In generale $\quad f : X \longrightarrow Y \quad , X, Y \subseteq \mathbb{R}$

$(x, f(x))\ , \ x \in X$



$\in \operatorname{im} f$

$\operatorname{im} f = \{ y \in Y : \ \exists\, x \in X, y = f(x) \}$

$\notin \operatorname{im} f$

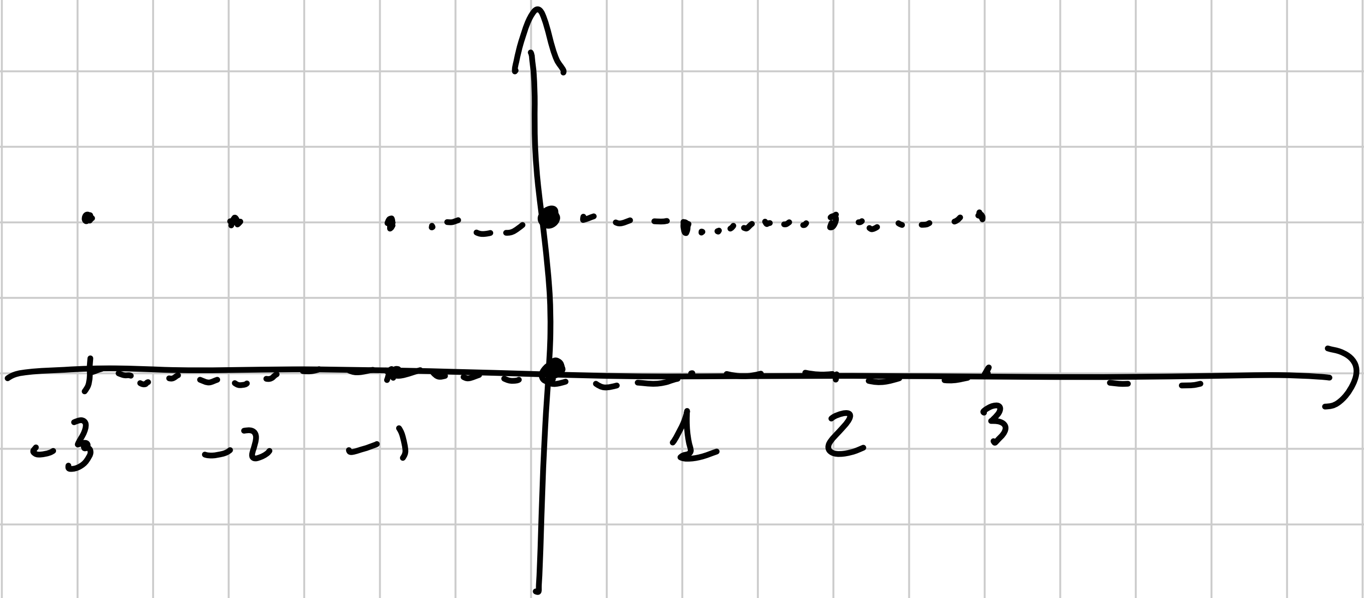
$f(x) =$

Funzione di Dirichlet (pettine per pidocchi)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dominio $= \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \mathrm{Im} f = \{0, 1\}$



OSS. non importa specificare il dominio di una funzione, in genere si prende il suo "dominio naturale", cioè gli x per i quali ha senso scrivere $f(x)$.

es. $f(x) = x^5 + 2 \qquad X = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x+1} \qquad X = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq -1\}$

$f(x) = \log_2 x \qquad X = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$

$x \longrightarrow \log_2 x$

X

Es. di funzione: le successioni

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longrightarrow a_n$$

$$f(n) = a_n$$

$$a(n)$$

es. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f(x)$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$3 \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$\vdots$

a_n

Funzioni <u>limitate</u>

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni a valori reali

$$\operatorname{im} f = \underbrace{f(X)}_{A} \subseteq \mathbb{R}$$

immagine di f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

<u>Def.</u> f è <u>limitata</u> se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X$$

$$\hookrightarrow -M \leq f(x) \leq M$$

A $\quad a \in A \quad a = f(x)$

$$\sup f(x) = \sup \underbrace{f(X)}_{A}$$ immagine di f

$$\inf f(x) = \inf f(X)$$

$$\max f = \max f(X)$$

$$\min f = \min f(X)$$

$$f(x) = x^4 + 1$$

$$X = \mathbb{R}$$

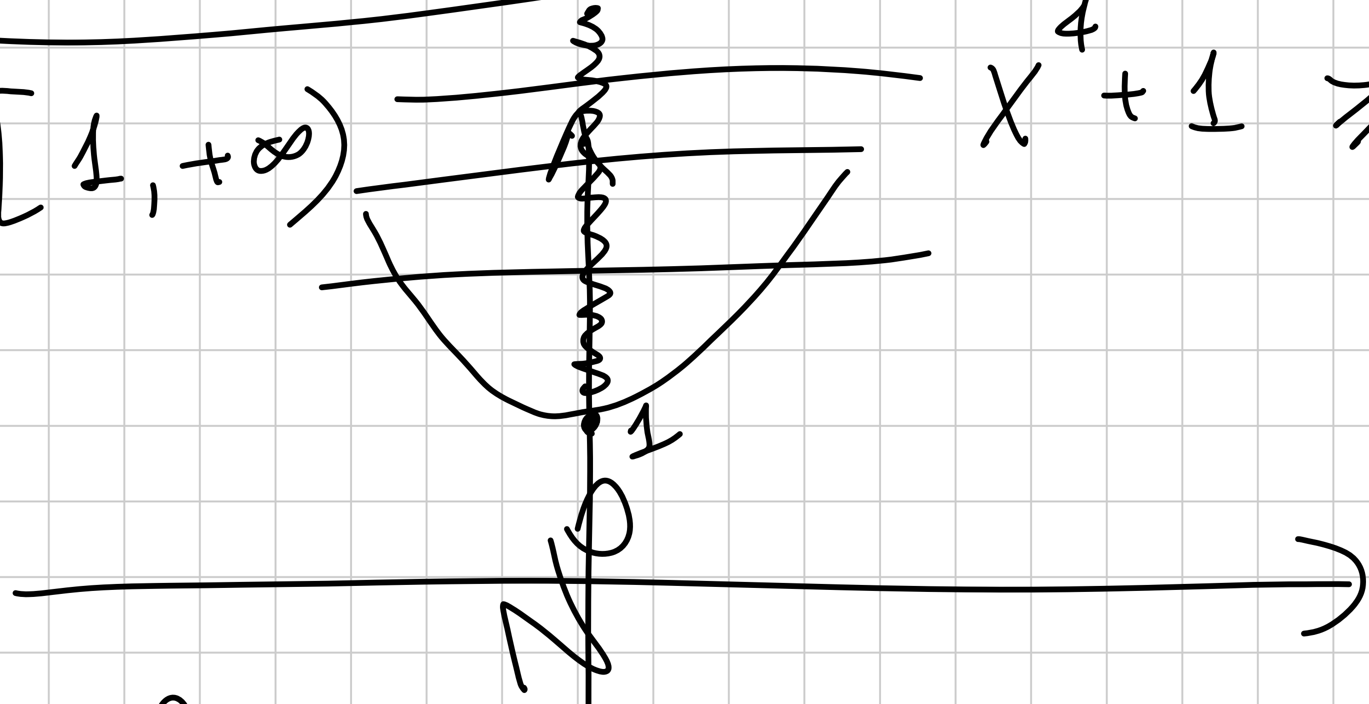
$$\mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$$

$$f(x) = 10 \leftarrow \text{immagine}$$

$$x^4 + 1 = 10$$

$$x^4 = 9$$

$$x^4 + 1 \geq 1$$



$$\min f = \min [1, +\infty) = 1$$

$$\sup f = +\infty$$