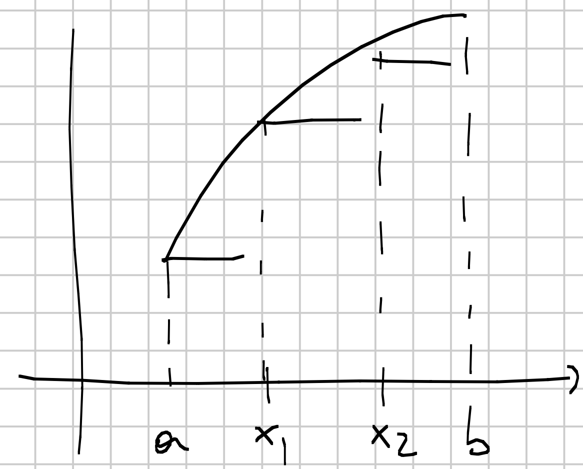
Integrali

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

D suddivisione di $[a,b]$



$m_i = \inf_{(x_{i-1},\, x_i)} f$

$M_i = \sup_{(\quad)} f$

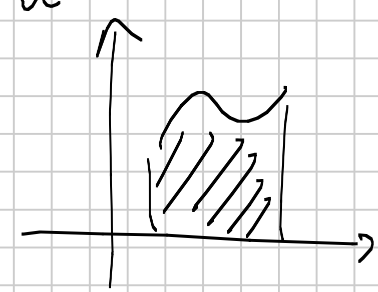
$s(D) = \sum_{i=0}^{n} m_i \, (x_i - x_{i-1})$ somma inferiore

$S(D) = \sum M_i \, (\qquad)$ somma superiore

f è integrabile in $[a,b]$

$$\sup s(D) = \inf S(D) =: \int_a^b f(x)\,dx$$

R- integrabile



Es. $f(x) = C$ $m_i = M_i = C$

$$\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)$$

__oss.__ Non tutte le funzioni limitate sono integrabili:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

f è limitata

$m_i = 0$

$M_i = 1$

$s(D) = 0$

$S(D) = 1$

$\forall D$

$\sup s(D) = 0 \neq$

$\inf S = 1$

f __non__ è R-__integrabile__

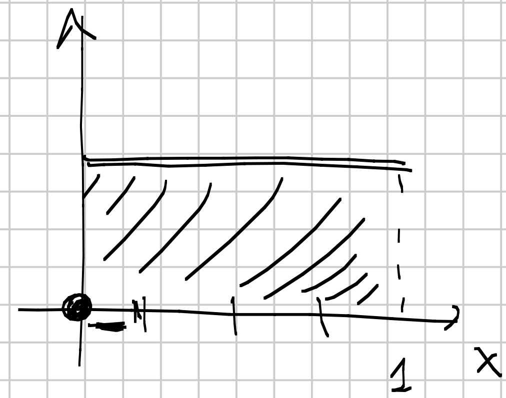
Teo. f è continua in $[a,b] \Rightarrow f$ è integrabile

Teo. f è monotona in $[a,b] \Rightarrow f$ è integrabile

Teo. f ha un numero finito di discontinuità, f limitata in $[a,b]$ $\Rightarrow f$ è integrabile.

<u>Es.</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = 1\,(1) = 1$$

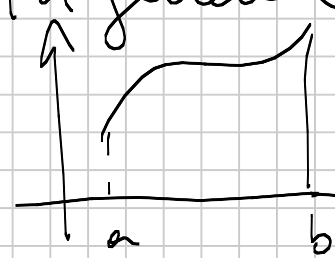
non conta il valore della funzione in un punto

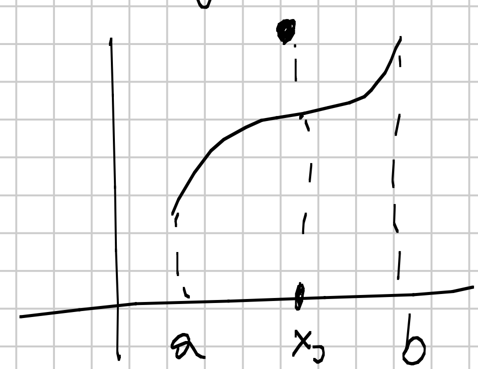
$m_i = 1$

D

$M_i = 1$

In generale

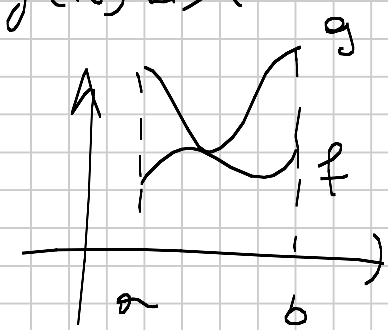




Proprietà dell'integrale $\quad f, g$ integrabili in $[a,b]$

1) $f+g$, αf, $\alpha \in \mathbb{R}$ sono integrabili

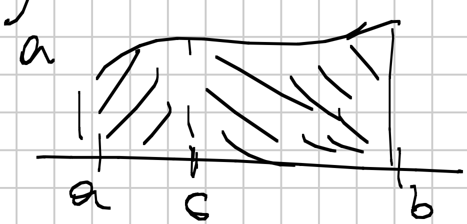
2) $f \le g$ in $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$



$\left(f = 0 \ : \ \text{se } g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0\right)$

3) $|f|$ è integrabile e $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

4) $c \in (a,b)$

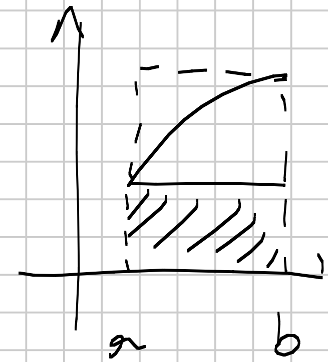


$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5) Teoreme delle medie

$m = \inf\limits_{[a,b]} f$

$M = \sup\limits_{[a,b]} f$



$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Medie integrale
(Velor medio)

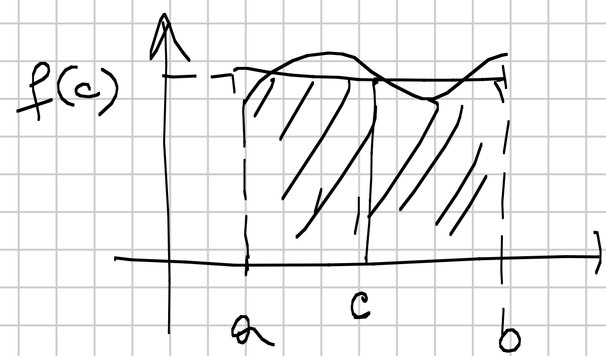
Se f è continue in $[a,b]$

✓ per il teorema dei valori intermedi è un valore di f

$$\exists\, c \in [a,b] : \boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

$\exists\, c \in [a,b]$:

$$f(c)\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Notazioni

$b > a$

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0$$

Come calcolare gli integrali

Primitive di una funzione

f definita in $[a,b]$. F derivabile in $[a,b]$ è una **PRIMITIVA** di f in $[a,b]$ se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Es. $f(x) = x$ $\qquad F(x) = \frac{x^2}{2}$ in $\mathbb{R}$

tutte le primitive di f $\qquad F(x) = \frac{x^2}{2} + K$

__Es.__ $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad F(x) = -\cos x + K$

__Prop.__ se F è primitiva di f, __tutte e sole__ le primitive di f sono del tipo $F + K$, $K \in \mathbb{R}$.

__Dim__ 1) $F + K$ è primitiva di f

infatti $(F+K)' = F' + 0 = f$

2) G primitiva di f $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $G = F + K$

$G' = f$ $\qquad$ $(G-F)' = 0$

$F' = f$

$\Downarrow$ teo. sulla derivata nulla

$G - F = K$ in $[a,b]$.

<u>OSS.</u> <u>Non</u> tutte le f ammettono primitiva F

se f è continua in $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $\exists$ sempre F

$$\{\text{primitive di } f\} =: \int f(x)\,dx$$

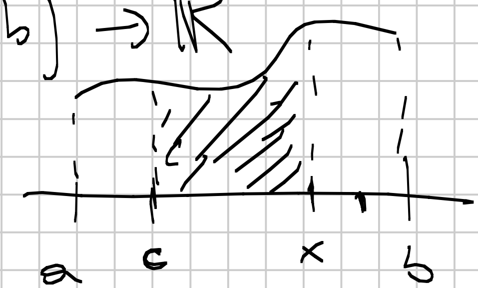
integrale
<u>INDEFINITO</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(x) = x \qquad \int x\,dx := \{\text{primitive di } x\} = \frac{x^2}{2} + K$$

Funzione integrale

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$



c fissato

$$F(x) \doteq \int_c^x f(t)\,dt$$

Funzione integrale di f relativa a c

$$F(c) = \int_c^c f(t)\,dt = 0$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ = numero reale

$\int_c^x f(t)\,dt$ = funzione di x

$\int f(x)\,dx$ = insieme di funzioni

Teorema <u>fondamentale</u> del calcolo <u>integrale</u>

f continua in $[a,b]$, $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$, $c \in [a,b]$ fissato

Allora $F(x)$ è C^1 in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

(F è una primitiva di f)

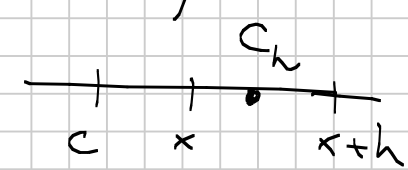
$$\left\{ \int_c^x f(t)\,dt + K \right\}_{K \in \mathbb{R}} = \text{tutte le primitive di } f$$

$$= \int f(x)\,dx$$

<u>Dim.</u> $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ <u>Ts.</u> F è <u>derivabile</u> e $F' = f \quad \forall x \in [a,b]$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\cancel{\int_c^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_c^{x} f(t)\,dt}\right) =$$



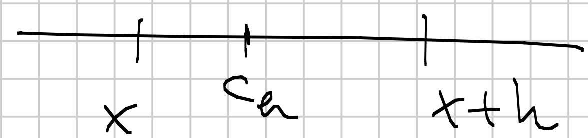
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

dal teorema della media per f continua $\exists \; c_h \in [x, x+h]$

t.c. $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)$

$c_h \in [x, x+h]$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h)$$



se $h \to 0$, $c_h \to x$

$f(c_h) \to f(x)$ perché f è continua

Quindi $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ #

Corollario: f continua in $[a,b]$, G primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \left(G(x)\Big/_a^b \right)$$

Dim.

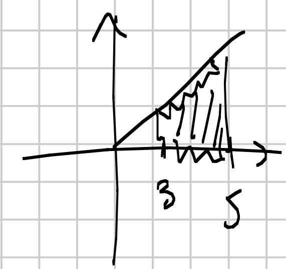
$$G(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{è una primitiva di } f} + K$$

dal teo. fond. del calcolo integrale

$$\underset{x=a}{G(a)} = \cancel{\int_a^a f}_{=0} + K = K$$

$x = b$

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + G(a)$$



<u>Es.</u> $f(x) = x$ $\qquad G(x) = \frac{x^2}{2}$

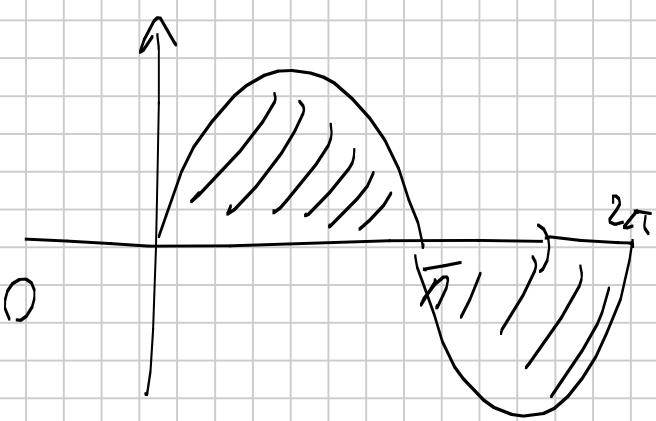
$$\int_3^5 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_3^5 = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\int_{-2}^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Bigg|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = -\frac{3}{2} < 0$$

Es. 2 $\quad f(x) = \operatorname{sen} x \qquad G(x) = -\cos x$

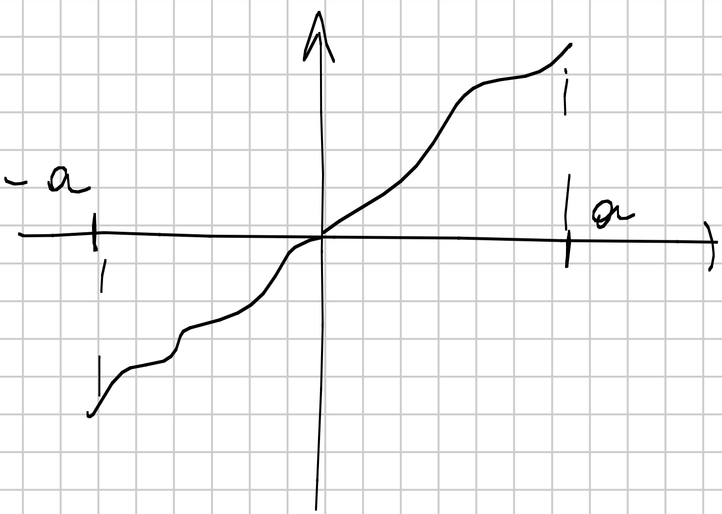
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = -1 + 1 = 0$$



__Oss.__ f dispari e $[a,b]$ è simmetrico rispetto all'origine $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0$

Provare per __es.__



Il calcolo di integrali definiti è ricondotto alla ricerca di primitive di funzioni.

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \left\{ \log|x| + K \right\}$$

$f(x) = x^\alpha$ $\qquad \int x^\alpha \, dx = \left\{ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \right\}$

$f(x) = \operatorname{senh} x$ $\qquad \int \operatorname{senh} dx = \left\{ \cosh x + K \right\}$

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$f(x) = e^{-x^2}$

non si riesce a esprimere le sue primitive con funzioni elementari