ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2017-2018

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

10 luglio 2018

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(\arctan x).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) scrivere la derivata seconda di f e studiarne il segno;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Ricordiamo che $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, e che $\arctan x > 0$ se e solo se $x \in (0, +\infty)$. Tenedo conto del dominio di log, dobbiamo imporre $\arctan x > 0$, quindi il dominio è $D = (0, +\infty)$. La funzione non ha particolari simmetrie o periodicità. Per quanto riguarda il segno, $\log y > 0$ se e solo se $y > 1$. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $\arctan x > 1$ cioè se e solo se $x > \tan 1 = \pi/4$. Dunque $f(x) > 0$ se $x > \pi/4$, $f(x) = 0$ se $x = \pi/4$ e $f(x) < 0$ se $0 < x < \pi/4$.

(b) Per quanto riguarda i limiti agli estremi, dalle proprietà di $\arctan x$,

$$\lim_{x\to 0^+} \log(\arctan x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log(\arctan x) = \log(\pi/2) > 0 \ (\pi/2 > 1),$$

quindi la funzione ha $x = 0$ come asintoto verticale destro e $y = \log(\pi/2)$ come asintoto orizzontale a $+\infty$. La funzione non può essere estesa per continuità in $x = 0^+$.

(c) La funzione è continua e derivabile nel suo dominio. Essendo $(\log y)' = 1/y$ e $(\arctan(x))' = 1/(1 + x^2)$ otteniamo facilmente

$$(\log(\arctan(x)))' = \frac{1}{\arctan(x)(x^2 + 1)}.$$

Dato che il dominio della funzione è $x > 0$, nel dominio si ha che $\arctan(x)(x^2 + 1) > 0$. Questo implica che $f'(x) > 0$ per ogni x del dominio, e dunque f è monotona crescente. Non ci sono punti di massimo o minimo, locale o assoluto.

(d) La funzione è derivabile due volte in tutto il suo dominio. Derivando la derivata prima, abbiamo

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\arctan(x)(x^2 + 1)}\right)' = -\frac{(2x\arctan(x) + 1)}{(\arctan x)^2(x^2 + 1)^2}.$$

Dato che il dominio è dato da $x > 0$, ho che nel dominio $2x\arctan(x) > 0$. Questo implica che $f''(x) < 0$ per ogni x nel dominio, e dunque che f è una funzione concava.

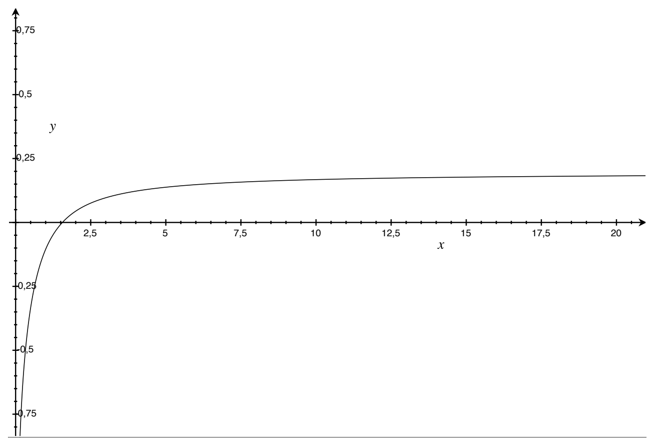

Figure 1: Grafico della funzione in $(0, 20)$.

(e) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{\cos 3x - 1 + \arcsin(x^5)}.$$

Svolgimento.

Ricordiamo che

- $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$;
- $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$;
- $\arctan(x) = x + o(x)$.

Quindi $\cos(3x) = 1 - 9x^2/2 + o(x^2)$, $\arctan(x^5) = x^5 + o(x^5)$.
Il numeratore diventa

$$\log(1+x) - x = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

e il denominatore

$$\cos 3x - 1 + \arcsin(x^5) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) - 1 + x^5 + o(x^5) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Sostituendo nel limite ottengo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{\cos 3x - 1 + \arcsin(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{9}.$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$$

Svolgimento.

Integriamo per parti due volte per determinare le primitive

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x)) \, dx \\
&= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \, dx \\
&= -x^2 \cos(x) + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx \\
&= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) - 2\cos(x) + C = -(x^2-2)\cos(x) + 2x\sin(x) + C.
\end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx &= \left[-(x^2-2)\cos(x) + 2x\sin(x)\right]_0^\pi \\
&= -(\pi^2-2)\cos(\pi) + 2\pi\sin(\pi) - (-(0^2-2)\cos(0) + 2\cdot 0 \cdot \sin(0)) = (\pi^2-2) - 2 = \pi^2 - 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare, usando il criterio del confronto asintotico, il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n^2) + n^3 - 3\sqrt{n}}{5n^\alpha - 3}.$$

Svolgimento.

Prima di tutto osserviamo che $\sin(n^2) \geq -1$ per ogni n e che $n^3 - 3\sqrt{n} > 1$ per ogni $n \geq 2$. Inoltre $5n^\alpha - 3 \geq 5 - 3 = 2 > 0$. Dunque per ogni $\alpha > 0$, $\frac{\sin(n^2)+n^3-3\sqrt{n}}{5n^\alpha-3} > 0$ se $n \geq 2$. Questo implica che per ogni $\alpha > 0$, la serie è definitivamente a termini positivi e posso utilizzare il criterio del confronto asintotico.

Osserviamo che per $n \to \infty$

- $\sin(n^2) + n^3 - 3\sqrt{n} \sim n^3$,
- per $\alpha > 0$ abbiamo $5n^\alpha - 3 \sim 5n^\alpha$.

Quindi

$$\frac{\sin(n^2) + n^3 - 3\sqrt{n}}{5n^\alpha - 3} \sim \frac{n^3}{5n^\alpha} = \frac{1}{5}\frac{1}{n^{\alpha-3}}.$$

La serie di termine generale $\frac{1}{n^{\alpha-3}}$ è una serie armonica generalizzata, e converge se e solo se $\alpha - 3 > 1$, ovvero $\alpha > 4$. Per il criterio confronto asintotico, dunque la serie converge se $\alpha > 4$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 4$.