Funzioni in più variabili

Corso di Analisi 1

di Andrea Centomo

7 gennaio 2010

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z} \ni n \geq 1$, l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (non vuoto) una funzione a valori scalari $f: X \to \mathbb{R}$ è una legge che ad ogni elemento $\boldsymbol{x} \in X$ associa uno e un solo elemento $y = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Vediamo un paio di esempi molto importanti. Le funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloide ellittico)

b) $g(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide iperbolico)

ed hanno i grafici di Figura 1. Le linee rosse sono ottenute intersecando i paraboloidi con piani del tipo $y = c$ e $x = c$, $c \in \mathbb{R}$. Ad esempio, se prendiamo il paraboloide ellittico è facile vedere che posto $y = c$ si ottiene $z = f(c, x) = c^2 + x^2$ che ha per grafico una parabola.

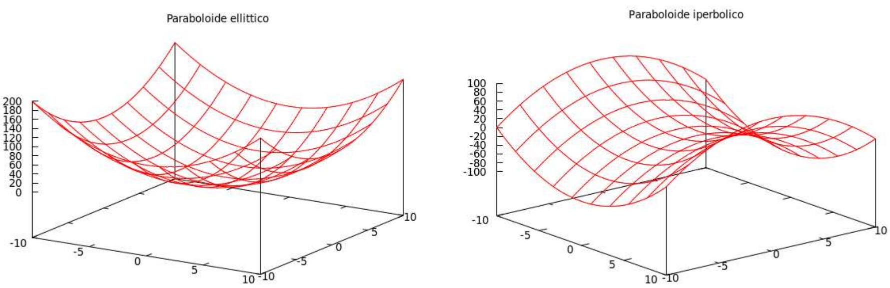

Figura 1. Paraboloidi ottenuti con Gnuplot

In quanto segue vogliamo estendere le nozioni di limite e continuità a questo genere di funzioni.

1 Concetti base

In $\mathbb{R}^n$ è definita in modo naturale l'operazione di *addizione* $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

L'addizione gode delle stesse proprietà viste per l'addizione di numeri reali:

a) associativa: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

b) elemento neutro: esiste $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

c) opposto: per ogni $\boldsymbol{x}$ esiste $-\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

d) commutativa: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

dove $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{0}=(0,0,...,0)$. In $\mathbb{R}^n$ è definita anche l'operazione di *moltiplicazione per uno scalare* $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,...,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n).$$

La moltiplicazione per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

a) distributiva sugli scalari: $(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{x}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}+\mu\cdot\boldsymbol{x}$

b) distributiva: $\lambda\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\cdot\boldsymbol{x}+\lambda\cdot\boldsymbol{y}$

c) $\lambda(\mu\cdot\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{x}$

d) $0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

e) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

L'insieme $\mathbb{R}^n$ con le operazioni definite sopra è un esempio di **spazio vettoriale**. Gli elementi dello spazio vettoriale prendono il nome di *vettori*.

Nota 1. Osserviamo che $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale e non $\mathbb{R}^n$. In altri termini una n-upla di numeri reali è un vettore solo **dopo** che sono state definite le operazioni di addizione e di prodotto per uno scalare.

Nota 2. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, con $n\geq 2$, **non** è ordinato.

Nello spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ è definito il *prodotto scalare* $\langle\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tra due vettori

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i=x_1y_1+...+x_ny_n$$

con le proprietà

1. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geq 0$ e l'uguaglianza si ha se e solo se $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$
2. $\langle\lambda\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$, con $\lambda\in\mathbb{R}$
3. $\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$
4. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$.

Il prodotto scalare, tra le altre cose, permette di definire l'ortogonalità tra vettori.

Definizione 3. *Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due vettori di $\mathbb{R}^n$, allora essi sono ortogonali se* $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=0$.

Il prodotto scalare induce su $\mathbb{R}^n$ una *norma* ossia una funzione $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definita da

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}.$$

La norma gode di proprietà analoghe a quelle del valore assoluto in $\mathbb{R}$

1. $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$
2. $\|\lambda\cdot\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ con $\lambda\in\mathbb{R}$
3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ (disuguaglianza triangolare)

Inoltre vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|\leq\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.$$

Prodotto scalare e norma permettono di definire (a meno di inversione del coseno) l'angolo φ compreso tra due vettori non nulli

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos\varphi = \frac{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}.$$

La norma induce una *metrica* su $\mathbb{R}^n$ ossia la funzione $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

La metrica gode di proprietà del tutto simili a quelle viste per la metrica euclidea su $\mathbb{R}$

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$
2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ se e solo se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
4. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ (disuguaglianza triangolare)

Nota 4. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale (base canonica) di vettori. Questo significa che esistono n vettori

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0) \quad \ldots \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

tali che

1. $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$, se $i \neq j$, (ortogonalità),
2. $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = 1$, $i = 1, \ldots, n$, (normalità)
3. per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n$ (essere base)

Attraverso la metrica possiamo definire gli intorni sferici e le sfere.

Definizione 5. *Siano $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, si dice intorno sferico di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ l'insieme*

$$B_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \epsilon\}.$$

In $\mathbb{R}^2$ un'intorno sferico è un cerchio di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ privato della circonferenza.

Definizione 6. *Siano $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, si dice sfera di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ l'insieme*

$$S_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \epsilon\}.$$

In $\mathbb{R}^2$ una sfera è una circonferenza di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ.

Esercizio 1. Rappresentare sfere e intorni sferici per $n = 3$.

2 Topologia su $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathfrak{B}$ che ha per elementi tutti gli intorni sferici di $\mathbb{R}^n$ è una *base* per la topologia. Attraverso gli intorni sferici possiamo definire le nozioni topologiche fondamentali.

Definizione 7. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che $\boldsymbol{x} \in X$ è* interno *a X se esiste $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset X$.*

Definizione 8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che A è aperto se tutti i suoi punti sono interni.*

L'insieme $\emptyset$ è aperto per definizione.

Definizione 9. *Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che B è chiuso se $B^c = \mathbb{R}^n \backslash B$ è aperto.*

Definizione 10. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme e $\bar{x} \in X$. Diremo che $\bar{x}$ è punto di frontiera per X se non è interno né esterno.*

Definizione 11. *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ diremo che X è limitato se esiste $B_\epsilon(\mathbf{0})$ e $X \subset B_\epsilon(\mathbf{0})$.*

L'insieme $\mathfrak{T}$ formato da tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$ prende il nome di topologia (euclidea) su $\mathbb{R}^n$ e non è difficile vedere che valgono le seguenti:

1. $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathfrak{T}$
2. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T}, n \in \mathbb{N}$.

Definizione 12. *Sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice intorno di $\boldsymbol{x}$ un qualsiasi insieme $I_{\boldsymbol{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ che contiene un aperto $A \subseteq I_{\boldsymbol{x}}$ e contiene $\boldsymbol{x} \in I_{\boldsymbol{x}}$.*

Nota 13. Lo spazio topologico $\mathbb{R}^n$ è *separabile* ossia dati due punti distinti $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ esistono almeno due intorni $I_{\boldsymbol{x}}$ e $I_{\boldsymbol{y}}$ che sono disgiunti $I_{\boldsymbol{x}} \cap I_{\boldsymbol{y}} = \emptyset$.

Esempio 14. Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\log(x + y)}$$

e studiarne i principali aspetti topologici.

Attraverso la topologia possiamo definire i concetti alla base della definizione di limite e di continuità:

Definizione 15. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Diremo che $\boldsymbol{x}$ è punto di accumulazione per X se per ogni $I_{\boldsymbol{x}}$ si ha $I_{\boldsymbol{x}} \cap X \backslash \{\boldsymbol{x}\} \neq \emptyset$.*

Definizione 16. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme e $\boldsymbol{x} \in X$. Diremo che $\boldsymbol{x}$ è punto isolato di X se esiste un intorno $I_{\bar{\boldsymbol{x}}}$ tale che $I_{\boldsymbol{x}} \cap X \backslash \{\boldsymbol{x}\} = \emptyset$.*

Per le funzioni di una sola variabile l'ampliamento $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ha permesso di considerare gli elementi $\pm\infty$ come punti di accumulazione tramite l'introduzione dei loro intorni e di dare quindi una definizione di limite anche per $x \to \pm\infty$. Dal momento che $\mathbb{R}^n$ non è ordinato se $n \geq 2$, non possiamo procedere come per $\mathbb{R}$. In ogni caso rimane possibile introdurre il concetto di limite per $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$: ciò consentirà di descrivere il comportamento di funzioni per valori sempre più grandi di $\|\boldsymbol{x}\|$. Poniamo quindi

$$\tilde{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

e definiamo intorno sferico di ∞, oltre ad $\tilde{\mathbb{R}}^n$ stesso, un qualsiasi insieme del tipo

$$B(\infty) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{y}\| > a\} \cup \{\infty\}, \qquad a \in [0, +\infty).$$

In questo modo possiamo parlare di ∞ come punto di accumulazione di un insieme contenuto in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. Non è difficile vedere che l'insieme dei suoi punti di accumulazione è

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\} \cup \{\infty\}.$$

3 Limiti e continuità

Definizione 17. *Sia* $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione e* $\boldsymbol{x}_0 \in \tilde{\mathbb{R}}^n$ *punto di accumulazione per* X*. Diremo che*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}}$$

se per ogni intorno U *di* l *esiste un intorno* V *di* $\boldsymbol{x}_0$ *tale che se* $\boldsymbol{y} \in V \cap X \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$ *allora* $f(\boldsymbol{y}) \in U$*.*

Una definizione equivalente alla precedente si ottiene sostituendo gli intorni con gli intorni sferici. Consideriamo ora alcuni esempi semplici utilizzando il paraboloide ellittico. Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|(x, y)\| < \delta$ allora $|f(x, y)| < \epsilon$. In effetti, osservato che

$$|f(x, y)| = \|(x, y)\|^2 < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \|(x, y)\| < \sqrt{\epsilon}$$

basta prendere $\delta = \sqrt{\epsilon}$ per completare la verifica. In modo analogo (si lascia per esercizio) si può verificare che

$$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = +\infty.$$

Non è difficile vedere che si estendono a funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ proprietà generali dei limiti di funzioni reali di variabile reale che non dipendono dalla struttura di ordine:

- teorema di unicità del limite
- limite di somma e prodotto per uno scalare sono uguali, rispettivamente, alla somma e al prodotto dei limiti qualora questi esistano finiti

e proprietà che dipendono dal fatto che il codominio $\mathbb{R}$ è ordinato

- Teorema della permanenza del segno
- Teorema del confronto

Se la definizione di limite di funzione reale di variabile reale, con relative proprietà, si estende in modo agevole alle funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ le cose sono diverse quando cerchiamo di *calcolare* i limiti.

Esempio 18. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2}$$

che ha come dominio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ calcolare

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2}.$$

dove $(0, 0)$ è di accumulazione per D.

Per risolvere esercizi di questo genere è molto utile il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio in quanto facile.

Teorema 19. *Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione e $\boldsymbol{x}_0 \in \tilde{\mathbb{R}}^n$ un punto di accumulazione per X. Allora*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}} \quad (\boldsymbol{x} \in A)$$

e $\boldsymbol{x}_0$ di accumulazione per A.

Consideriamo allora

$$A = \{(x,y) \in D: y = mx, m \in \mathbb{R}\}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1 + x^2 + 3m^2x^2)}{x^2 + 5m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3m^2)x + o(x)}{(1+5m^2)} = 0.$$

Proviamo allora a verificare a partire dalla definizione che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} = 0.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|\bar{x}\| < \delta$ allora

$$\left| \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} - 0 \right| < \epsilon.$$

Osserviamo che

$$0 \leq \left| \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \right| \leq \frac{|y|(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \leq |y|$$

e quindi per il Teorema del confronto (che continua a valere!) il limite è zero.

Esempio 20. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{yx}{x^2+y^2}$$

che ha come dominio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ e proviamo a calcolare, se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx}{x^2+y^2}.$$

dove $(0,0)$ è di accumulazione per D.

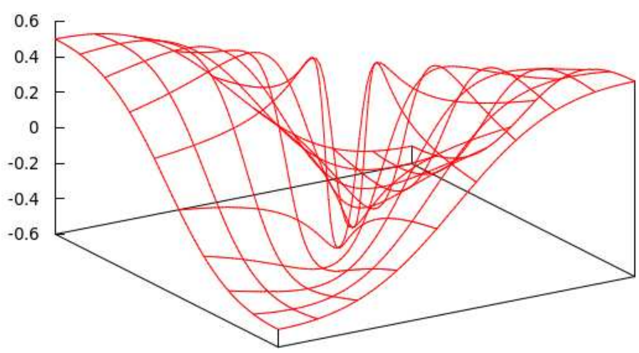

Figura 2. Grafico di $z = xy/(x^2+y^2)$

Consideriamo allora

$$A_1 = \{(x, y) \in D \colon y = x\}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Se però consideriamo

$$A_2 = \{(x, y) \in D \colon y = 0\}$$

e calcoliamo il limite avremo

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0 \neq \frac{1}{2}.$$

Quindi il limite non esiste.

3.1 Coordinate polari

Un certo numero di limiti per funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ si può calcolare ricorrendo ad un cambiamento in coordinate polari. Dato un qualsiasi punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ esso può essere rappresentato da

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si vede subito che

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\boldsymbol{x}\|$$

mentre θ è l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$.

Vediamo ora di chiarire la questione relativa al cambiamento di variabili nel calcolo di limiti del tipo

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = l \in \mathbb{R}.$$

Per definizione deve essere che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|\boldsymbol{x}\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(\boldsymbol{x}) - l| < \epsilon.$$

Possiamo riformulare in coordinate polari la cosa dicendo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\rho < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - l| < \epsilon$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Ciò equivale a dire

$$\lim_{\rho \to 0^+} f(\rho, \theta) = l \in \mathbb{R}$$

indipendentemente dal valore di θ! Vediamo un paio di esempi che permettano di capire il senso della cosa.

Esempio 21. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Passando in coordinate polari il limite diventa

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2 \cos^2\theta}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \rho \cos^2\theta$$

e il suo valore è 0 indipendentemente da θ.

Esempio 22. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}.$$

Passando in coordinate polari il limite diventa

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0.$$

Un esempio molto interessante di funzione in due variabili è il seguente

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

di cui vogliamo vedere se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Ora

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = 0$$

ma anche che

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = 1$$

e quindi il limite non esiste.

La definizione di continuità data per le funzioni reali di variabile reale si estende in modo naturale al caso $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definizione 23. *Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione e $\boldsymbol{x}_0 \in X$*

i. se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di accumulazione per X diremo che f è continua in $\boldsymbol{x}_0 \in X$ se

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

ii. se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto isolato di X diremo che f è continua in $\boldsymbol{x}_0$ per definizione.

Inoltre f si dice continua in X se lo è in ogni punto di X.

Esempi semplici di funzioni continue sono le proiezioni

$$p_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \to p_j(\boldsymbol{x}) = x_j$$

con $j = 1, \ldots, n$. Non è poi difficile vedere che:

a) somma e prodotto per uno scalare di funzioni continue sono continui

b) la composizione di funzioni continue è continua ossia se $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue nel loro dominio e $f(X) \subseteq Y$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in X.

Esempio 24. Dire se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} \arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua nei punti appartenenti alla retta $x = 0$.

Soluzione. Distinguiamo due casi

a) (x, y_0) con $y_0 \neq 0$. Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{(y_0+mx)^2}{x^2} \arctan\left(x^2+(y_0+mx)^2\right) = +\infty$$

e quindi la funzione non è continua;

b) $(x, y) = (0, 0)$. Allora se $y = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} \arctan\left(x^2+x\right) = 1 \neq 0$$

e quindi la funzione non è continua.

Esempio 25. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è continua nei punti appartenenti alla retta $x = 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(y) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3.2 Teorema di Weierstrass

Analogamente a quanto visto per lo spazio topologico $\mathbb{R}$

Definizione 26. *Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato.*

Per le funzioni continue si mantiene valido il seguente importante.

Teorema 27. (di Weierstrass) *Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'insieme compatto K. Allora*

a) $f(K)$ è compatto in $\mathbb{R}$,

b) in K esistono $\max f$ e $\min f$.

4 Funzioni vettoriali

Una seconda famiglia importante di funzioni in più variabili è rappresentata dalle funzioni del tipo

$$\boldsymbol{f}\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

con $m \geq 2$. Ad esempio,

$$\boldsymbol{f}\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

individua la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine di $\mathbb{R}^2$. Per questo tipo di funzioni la nozione di limite si estende in modo del tutto analogo a quanto visto per le funzioni scalari.

Definizione 28. *Sia $\bar{f}\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X. Diremo che*

$$\lim_{x\to x_0} \bar{f}(x) = \bar{l} \in \tilde{\mathbb{R}}^m$$

se per ogni intorno U di l esiste un intorno V di x_0 tale che se $y \in V \cap X \backslash \{x_0\}$ allora $\bar{f}(y) \in U$.

Tuttavia è molto importante osservare che esiste un modo alternativo ed equivalente al precedente di introdurre il limite. Nel caso del limite finito ad esempio si ha

Definizione 29. *Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X. Diremo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^m$$

con

$$\boldsymbol{l} = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \lim_{x \to x_0} f_2(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_m(x) \right)$$

se $\lim_{x \to x_0} f_i(x)$ esiste finito per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Quindi di fatto lo studio del limite si riconduce allo studio di m limiti di funzioni reali di variabile reale. Risulta piuttosto spontaneo anche estendere la nozione di continuità nel seguente modo.

Definizione 30. *Sia $\boldsymbol{f}: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in X$. Diremo che $\boldsymbol{f}$ è continua in x_0 se lo sono le componenti $f_i: X \to \mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Si dimostra senza problemi che questa definizione è equivalente alla seguente.

Definizione 31. *Sia $\boldsymbol{f}: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in X$*

i. se x_0 è un punto di accumulazione per X diremo che $\boldsymbol{f}$ è continua in $x_0 \in X$ se

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x_0)$$

ii. se x_0 è un punto isolato di X diremo che $\boldsymbol{f}$ è continua in x_0 per definizione.

Definizione 32. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una curva in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, è una funzione*

$$\gamma: I \to \mathbb{R}^m$$

continua in I.

L'immagine $\gamma(I)$ prende il nome di *sostegno* della curva.

Esempio 33. Studiare le curve

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}2, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x) \qquad \text{(circonferenza)}$$

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x, x) \qquad \text{(elica cilindrica)}$$

5 Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^2$

In questo paragrafo vogliamo introdurre le idee alla base dello studio dei massimi e minimi locali di funzioni in più variabili a valori scalari. Prima di affrontare questo discorso è importante fare alcune osservazioni sullo studio dei massimi e minimi per funzioni reali di variabile reale. Sia $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare, supponiamo, ad esempio, che sia $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Per determinare i punti di massimo e minimo locale di f **interni** ad $[a, b]$ di solito si procede in questo modo

a) si calcola $f'(x)$

b) si studia il segno della derivata prima ossia si risolve la disequazione $f'(x) \geq 0$ con $x \in (a, b)$

c) dallo studio del segno si traggono le conclusioni.

Ad esempio,

$$f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2$$

si calcola $f'(x) = 2x$ e, osservato che in $(-1, 0)$ la derivata è negativa, in $(0, 1)$ la derivata è positiva, si conclude che $x = 0$ è un punto di minimo locale.

Questo tipo di ragionamento **non** ha alcuna speranza di essere estendibile al caso di funzioni di più variabili a valori scalari. Tralasciando per un attimo il fatto che non abbiamo ancora introdotto per questo tipo funzioni un analogo della derivata, resta il problema che in $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, non è definita una struttura di ordine e quindi in questo ambiente non si possono certo risolvere le disequazioni! Per le funzioni reali di variabile reale è disponibile un metodo alternativo per la determinazione degli estremi locali che si fonda sul seguente risultato.

Teorema 34. *Sia $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Se esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f'(x_0) = 0$$

si hanno i seguenti casi:

i. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale

ii. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo locale.

In quanto segue in sostanza non si fa altro che estendere questo teorema al caso di funzioni in due variabili a valori scalari.

5.1 Derivate parziali

Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e sia (x_0, y_0) un punto dell'aperto A. Se esiste finito il valore del limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

diremo che f è derivabile parzialmente rispetto a x in x_0 e indicheremo il valore del limite con la notazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Non è difficile vedere che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = [f'(x, y_0)](x_0)$$

ossia che la derivata parziale di f rispetto a x in (x_0, y_0) si ottiene derivando la funzione di una variabile $f(x, y_0)$ e calcolando il valore della derivata per $x = x_0$. Osserviamo che che la funzione di una variabile reale $f(x, y_0)$ ha per grafico l'intersezione tra il grafico di $f(x, y)$ e il piano di equazione $y = y_0$ e questo permette di dare un'interpretazione geometrica della derivata parziale rispetto a x in un punto come coefficiente angolare della tangente al grafico di $f(x, y_0)$ nel punto x_0.

Possiamo ripetere quanto appena detto per la variabile x per la variabile y e quindi possiamo dire che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = [f'(x_0, y)](y_0)$$

se il valore del limite esiste finito.

Esempio 35. Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, y) = x^y$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Posto $f(x, y) = e^{y \log x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} e^{y \log x} = y x^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \log x} (\log x) = x^y \log x$$

con $(x, y) \in A$.

Se in un punto $\boldsymbol{x} \in A$ esistono le derivate parziali di f la funzione si dice derivabile in $\boldsymbol{x}$ e il vettore

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right)$$

prende il nome di *gradiente* di f in $\boldsymbol{x}$. Con riferimento all'Esempio 2 si ha

$$\nabla f(x, y) = \left(y x^{y-1}, x^y \log x \right).$$

Nota 36. Il fatto che una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammetta derivate parziali in un punto non garantisce la sua continuità. Per rendersi conto di questo si consideri l'esempio della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

che non è continua in $(0, 0)$ ma per la quale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

5.1.1 Derivate successive

Consideriamo ora una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e supponiamo che sia derivabile parzialmente in tutti i punti di un aperto A. Attraverso le derivate parziali possiamo definire due nuove funzioni di A in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Ha senso allora chiedersi se queste funzioni sono a loro volta derivabili parzialmente in A e scrivere cose del tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

che, se esistono, indicheremo rispettivamente con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Per le derivate miste vale il seguente.

Teorema 37. (di Schwarz) *Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile parzialmente due volte e con derivate seconde continue. Allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

5.2 Massimi e minimi

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Le nozioni di punto di estremo relativo e assoluto per f sono le stesse date per le funzioni reali di variabile reale. Diremo che $(x_0, y_0) \in A$ è un **punto critico** di f se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ossia se il punto annulla entrambe le derivate parziali. Per i punti critici vale il seguente importante.

Teorema 38. *Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$ derivabile parzialmente e con derivate parziali continue. Se un punto $(x_0, y_0) \in A$ è di estremo relativo per f allora è anche critico.*

Il Teorema, in modo del tutto simile a quanto visto per le funzioni reali di variabile reale, ci informa del fatto che almeno un sottoinsieme degli estremi relativi di f potrebbe essere formato da punti critici. Per funzioni sufficientemente regolari vale poi il seguente.

Teorema 39. *Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$ derivabile parzialmente due volte e con derivate parziali seconde continue. Se $(x_0, y_0) \in A$ è un punto critico allora*

a) (x_0, y_0) *è un minimo relativo se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

b) (x_0, y_0) *è un massimo relativo se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

c) (x_0, y_0) *non è né un minimo relativo né un massimo relativo se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 < 0.$$

Per ricordare le condizioni del Teorema precedente è sufficiente ricordare che le funzioni

a) $f(x, y) = -x^2 - y^2$ (paraboloide ellittico concavo)

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloide ellittico convesso)

c) $g(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide iperbolico)

hanno rispettivamente in $(0, 0)$ un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e un punto che non è né un minimo relativo né un massimo relativo (punto di sella).

Se si introduce la **matrice hessiana** definita come

$$D^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

e noto che il **determinante** di $D^2 f(\boldsymbol{x})$ è definito da

$$\det\big(D^2 f(\boldsymbol{x})\big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{x})\right)^2$$

il Teorema 6 si può riformulare come

Teorema 40. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$ derivabile parzialmente due volte e con derivate parziali seconde continue. Se $(x_0, y_0) \in A$ è un punto critico allora*

a) (x_0, y_0) è un minimo relativo se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \qquad \det\big(D^2 f(x_0, y_0)\big) > 0$$

b) (x_0, y_0) è un massimo relativo se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \qquad \det\big(D^2 f(x_0, y_0)\big) > 0$$

c) (x_0, y_0) non è né un minimo relativo né un massimo relativo se

$$\det\big(D^2 f(x_0, y_0)\big) < 0.$$

5.3 Il differenziale

Abbiamo visto nella Nota 3 del paragrafo precedente che per le funzioni in più variabili la derivabilità in un punto non è sufficiente per garantire la continuità della funzione in quel punto. Una nozione di derivabilità "più forte" si può introdurre per le funzioni in più variabili estendendo il fatto noto per cui una funzione reale di variabile reale è derivabile in un punto x_0 se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Muovendo da questo punto di vista diamo la seguente definizione.

Definizione 41. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'aperto A. Diremo che f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0 \in A$ se*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|).$$

Il termine

$$\langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

è l'equazione di un **piano** che ha la proprietà speciale di essere **tangente** al grafico di f nel punto $(\boldsymbol{x}_0,\ f(\boldsymbol{x}_0))$. In sostanza allora la differenziabilità in un punto significa geometricamente che il grafico della funzione si può approssimare *localmente* con un piano.

Teorema 42. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\boldsymbol{x}_0 \in A$ allora f è continua in $\boldsymbol{x}_0$.*

Dimostrazione. Se f è differenziabile per definizione si ha

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$$

da cui, per le proprietà del limite e per la continuità delle funzioni lineari, si ottiene subito la tesi

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

□

5.4 Derivate direzionali

Per le funzioni di più variabili a valori scalari si introduce anche il concetto di derivata direzionale.

Definizione 43. *Sia* $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione definita su un aperto* A, $\boldsymbol{x} \in A$ *e* $\boldsymbol{v}$ *un vettore di norma unitaria di* $\mathbb{R}^2$. *Se esiste finito il limite*

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

esso prende il nome di derivata direzione $\boldsymbol{v}$ *di* f *in* $\boldsymbol{x}$.

Non è difficile intuire che la differenziabilità in un punto di una funzione implica la sua derivabilità in ogni direzione.

Bibliografia

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw-Hill, 2007.

[2] A. Chiffi, *Analisi Matematica*, Volume 2, Editrice Alceo, 1983.