

PROGRAMMA del corso di Matematica A

Area dell'Informazione, gruppi 6/7
a.a. 2001-2002, docente: Paola Mannucci

1. Insiemi, numeri, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Relazioni d'ordine. Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore.
- Funzioni: definizione, composizione, funzione iniettiva e suriettiva, funzione inversa.
- Numeri naturali, principio d'induzione (dispensa). Esempi di dimostrazioni per induzione.
- Fattoriali, coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton. Somma della progressione aritmetica e geometrica.
- Numeri interi e razionali. Proprietà dei campi ordinati, proprietà di Archimede.
- Definizione dei numeri reali. Completezza di \mathbb{R} ; \mathbb{Q} non contiene $\sqrt{2}$. Proprietà caratteristiche di sup e inf. (dispensa)
- Coordinate cartesiane e distanza sulla retta e nel piano. Rappresentazione geometrica dei numeri reali e dei grafici di funzione.
- Radici n-esime in \mathbb{R} ; potenze ad esponente razionale e reale, loro proprietà e grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni monotone. Disuguaglianza triangolare.
- Funzioni trigonometriche e loro proprietà.
- I numeri complessi: operazioni e loro interpretazione geometrica. Coniugato e modulo.
- Forma algebrica e trigonometrica dei complessi.
- Potenze e radici n-esime in \mathbb{C} ; soluzione di equazioni di 2o grado.
- Polinomi a coefficienti complessi: divisione con resto, teorema di Ruffini, molteplicità delle radici, principio di identità (dispensa). Teorema fondamentale dell'algebra.

2. Successioni e serie numeriche

- Limiti di successioni, successioni convergenti, divergenti e indeterminate.
- Limite della successione geometrica.
- Unicità del limite (con dim.), limitatezza delle successioni convergenti (con dim., dispensa).
- Teoremi della permanenza del segno (con dim), del confronto (con dim.).
- Limiti di somme, prodotti e quozienti; forme di indecisione.
- Esistenza del limite di successioni monotone (con dim., dispensa) e sue applicazioni, il numero e .
- Confronti di infinitesimi ed infiniti, successioni asintotiche.
- Confronti asintotici delle successioni elementari (potenze, esponenziali, log...).
- Serie numeriche convergenti, divergenti e indeterminate; somma di una serie.
- La serie geometrica (dim. del suo comportamento).
- Condizione necessaria per la convergenza; (con dim.)
- Serie a termini non negativi e loro criteri di convergenza: del confronto (con dim.), del confronto asintotico, della radice, del rapporto.
- Criterio di convergenza dell'integrale (dispensa).
- La serie armonica generalizzata.
- Convergenza assoluta e convergenza.
- Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz .

2. Limiti e funzioni continue.

- Funzioni pari e dispari, funzioni limitate, funzioni monotone.
- Definizione generale di limite di funzioni reali di una variabile reale mediante limiti di successioni.
- Equivalenza della definizione di limite con la definizione attraverso gli intorni; casi particolari (dispensa).
- Limite destro e sinistro.
- Teoremi della permanenza del segno, del confronto.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$ (con dim.)
- Limiti di somme, prodotti e quozienti; forme di indecisione.
- Limiti di funzioni composte (con dim.). Cambio di variabili nei limiti.
- Esistenza del limite di funzioni monotone.
- Confronti di infinitesimi ed infiniti, simboli o , (o piccolo e asintotico) e loro legami; principio di sostituzione di infinitesimi ed infiniti e uso degli sviluppi asintotici nel calcolo delle forme indeterminate.
- Limiti notevoli e confronti asintotici delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, log...).
- Definizione di funzione continua. Continuità di somma, prodotto e rapporto di funzioni continue.
- Continuità delle funzioni elementari (dim. nel caso $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$) - Continuità delle funzioni composte (con dim.).
- Punti di discontinuità.
- Teorema degli zeri delle funzioni continue (con dim.), teorema dei valori intermedi (con dim.).
- Continuità e discontinuità delle funzioni monotone in intervalli.
- continuità dell' inversa di una funzione continua strettamente monotona .
- Inverse delle funzioni esponenziali, trigonometriche e iperboliche.
- Massimi e minimi delle funzioni continue: teorema di Weierstrass.

3. Calcolo differenziale.

- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale. Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico. Derivata sinistra e destra.
- Legami tra derivabilità e continuità (con dim.). Derivate successive.
- Derivate delle funzioni elementari. Regole di derivazione (somma, prodotto (con dim.) e quoziente).
- Derivata di funzioni composte. Derivata della funzione inversa (con dim.).
- Massimi e minimi locali di funzioni derivabili: teorema di Fermat (con dim.).
- Teoremi di Lagrange (valor medio) (con dim.).
- Teorema della derivata nulla (con dim.).
- Test di monotonia per funzioni derivabili (con dim.), condizioni sufficienti per i massimi e minimi locali.
- Teorema di De L' Hopital.
- Formula di Taylor col resto di Peano (dim. per le formule di ordine 1 e 2, dispensa) e col resto di Lagrange.
- Sviluppi asintotici delle funzioni elementari.
- Stima dell'errore nel calcolo delle funzioni elementari (cenni).
- Serie di Taylor: definizione di funzione sviluppabile ed esempi.
- La serie esponenziale converge a $\exp(x)$ in \mathbb{R} .
- Esponenziale complesso (cenni).

- Funzioni convesse per corde, per tangenti.
- Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili e per funzioni due volte derivabili. Flessi (dispensa).
- Asintoti obliqui.
- Determinazione del grafico di una funzione. Ricerca degli zeri di funzioni derivabili.

4. Calcolo integrale e integrali generalizzati.

- Integrale definito per funzioni continue. Somme di Cauchy.
- Trapezoide associato a una funzione non negativa e significato geometrico dell'integrale.
- Linearità (con dim.) e monotonia dell'integrale; integrabilità del modulo.
- Teorema della media integrale per funzioni continue (con dim.).
- Additività rispetto all'intervallo di integrazione, integrali su intervalli orientati.
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale, esistenza di primitive di una funzione continua.
- Calcolo di integrali definiti mediante primitive (integrale indefinito).
- Integrazione per scomposizione, per parti (con dim) e per sostituzione (con dim).
- Integrazione delle funzioni razionali mediante rappresentazione in fratti semplici, sostituzioni notevoli per l'integrazione di alcune funzioni irrazionali.
- Integrali generalizzati di funzioni illimitate su intervalli limitati o di funzioni continue su intervalli illimitati.
- Integrali generalizzati di funzioni non negative, teoremi del confronto (con dim., dispensa) e del confronto asintotico.
- Convergenza assoluta e convergenza per gli integrali impropri.

5. Equazioni differenziali.

- Equazioni differenziali del primo ordine in forma generale, definizione di integrale generale.
- Problema di Cauchy, definizione di soluzione.
- Equazioni del primo ordine a variabili separabili, formula risolutiva (con dim.).
- Equazioni del primo ordine lineari, formula risolutiva.
- Equazioni lineari del secondo ordine, struttura dell'integrale generale, soluzioni linearmente indipendenti, combinazione lineare di due soluzioni.
- Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti, formule risolutive mediante le radici dell'equazione caratteristica associata.
- Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti, ricerca della soluzione particolare quando il termine noto è un polinomio, un esponenziale complesso, o una loro combinazione lineare.

6. Funzioni in più variabili

- Funzioni in più variabili a valori vettoriali.
- Definizione di distanza in \mathbb{R}^n . Definizione di intorno, di intorno sferico.
- Coordinate polari nel piano.
- Funzioni in più variabili a valori reali: definizione di limite mediante successioni e mediante gli intorni, funzioni continue. Calcolo dei limiti mediante le coordinate polari.
- Definizione di insieme aperto, chiuso, in \mathbb{R}^2 . Frontiera, chiusura e punti interni di un insieme.
- Insiemi connessi, limitati. Teoremi di Weierstarss, teorema degli zeri.
- Derivate parziali per funzioni in più variabili. Gradiente.

Testo consigliato

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Matematica, Zanichelli.

Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione.

Alcuni argomenti non trattati nel testo si possono trovare in una dispensa, scaricabile in formato .pdf dal sito

www.math.unipd.it/~mannucci

oppure disponibile presso la docente o in segreteria didattica del Dipartimento di Matematica Pura e Applicata (primo piano).

Tra i vari testi di esercizi si segnalano i testi di

S. Salsa, A. Squellati "Esercizi di matematica" (ed. Zanichelli)

G. De Marco e C. Mariconda "Esercizi di calcolo in una variabile" (ed. Decibel-Zanichelli),

Marcellini e Sbordone "Esercitazioni di matematica" (ed. Liguori).

L'orario di ricevimento del docente nel suo studio (Dipartimento di Matematica P. e A., 4o piano di via Belzoni 7, giovedì ore 12–13.30) resta in vigore fino a gennaio, salvo diverso avviso ed escluse le sovrapposizioni con gli esami.

Il ricevimento studenti, dopo i primi due appelli, si svolgera' su appuntamento (049/8275949, mannucci@math.unipd.it).

La docente Paola Mannucci