PROGRAMMA del corso di Analisi Matematica 1

Ingegneria gestionale, meccanica e meccatronica, Vicenza, Canale 3
a.a. 2008-2009, docente: Paola Mannucci

Testo Consigliato:
Analisi Matematica, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, McGraw-Hill Editore.
Appunti di lezione e complementi in rete (http://www.math.unipd.it/ mannucci/).

1. Elementi di base: insiemi, numeri, funzioni, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Proprietà delle operazioni, relazione d'ordine. Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ (con dim.). Proprietà di Archimede di $\mathbb{Q}$ (con dim.). Definizione dei numeri reali con gli allineamenti decimali.
- Proprietà di densità in $\mathbb{R}$, proprietà di Archimede in $\mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Proprietà caratteristiche di sup e inf. Se esiste il massimo esso è unico (con dim.).
Proprieta' di completezza di $\mathbb{R}$.
- Disuguaglianze utili: disuguaglianza triangolare (con dim.), di Cauchy-Schwarz (con dim.), relazione tra la media aritmetica e la media geometrica per due (con dim.) o piu' elementi.
- Sommatorie e loro proprieta'. La somma di una progressione geometrica (con dim.), la somma di una progressione telescopica.
- Principio di induzione. Esempi di dimostrazioni per induzione, disuguaglianza di Bernoulli (con dim.).
- Fattoriali, coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton.
- Funzioni: definizione di funzione, dominio, codominio, immagine, grafico. Funzione iniettiva e suriettiva, composizione di funzioni, funzione inversa, funzione monotona, crescente, decrescente, composizione di funzioni monotone, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche.
- Funzioni limitate superiormente, inferiormente, limitate. Caratterizzazione del sup e inf di funzioni.
- Operazioni con le funzioni.
- Funzioni lineari. Potenze ad esponente naturale, radici n-esime in $\mathbb{R}$; - potenze ad esponente intero, razionale, reale, loro proprietà e grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro proprietà.
- Funzioni iperboliche e loro inverse.

2. Limiti per funzioni di una variabile.

- Intorni: definizione di distanza, distanza euclidea, intorno sferico di x_0 reale.
- Definizione di retta ampliata e di intorno di $\pm\infty$.
- Proprietà degli intorni (topologia). Definizione di punto di accumulazione e di punto isolato.
- Definizione di proprietà che una funzione possiede "definitivamente" per $x \to x_0$.
- Insiemi aperti e chiusi: definizione di punto interno, esterno, di frontiera ad un insieme. Definizione di insieme aperto e insieme chiuso; un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione reali.
- Limite: definizione di limite (con gli intorni ed esplicita, sia per x_0 ed l reali che infiniti ($\forall\varepsilon \quad \exists\delta$..., ecc..).
- Teorema di unicità del limite (con dim.).
- Definizione di limite destro e sinistro.
- Proprietà dei limiti: limitatezza locale delle funzioni con limite finito (con dim.).
- Teorema di permanenza del segno (con dim., nel caso di limite reale), Teorema del confronto (dei "Carabinieri") (con dim. nel caso di limite reale).
- Teoremi di calcolo: limite di somme, prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata.
- Limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita. Forme indeterminate.

-Teorema di esistenza del limite dx e sx per funzioni monotone (con dim. nel caso di f crescente e limite sinistro).
-Teorema sul limite di funzione composta (con dim.).
- Limiti delle funzioni elementari.
- Primi limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e derivati.
- Scala di funzioni infinite a $+\infty$.
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \to x_0$. Funzioni infinite o infinitesime non confrontabili per $x \to x_0$.
- Funzioni asintotiche per $x \to x_0$. Funzioni campione e concetto di ordine di infinito o infinitesimo rispetto al campione per $x \to x_0$. Uso delle scale di infiniti e infinitesimi per $x \to x_0$ nel calcolo dei limiti.
- Definizione di o piccolo per limiti di funzioni.

2. Limiti di successioni.
- Successioni a valori in **R**: definizione di limite di successione.
- Successione convergente, divergente e irregolare. Teoremi sui limiti di successione (riformulazione dei teoremi sulle funzioni).
- Scala di successioni infinite. - Limite della successione geometrica (con dim.).
- Esistenza del limite di successioni monotone. e sue applicazioni.
- Il numero e. Definizione di e come limite di successione.
- Sottosuccessioni: definizione. Teorema: una successione ha limite l se e solo se tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite.
- Criterio del rapporto per successioni a termini positivi (con dim.).
- Uguaglianza tra il limite del rapporto e il limite della radice n-esima per successioni a termini positivi.
- Ulteriori limiti di funzioni notevoli (derivati dalla definizione di e): $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{log(x+1)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$ $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, quando $x \to 0$ (con dim.).
-Non esistenza di limiti. Enunciato del Teorema-ponte tra il limite di $f(x)$ e il limite di successioni. Criterio di non esistenza del limite.

3. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
- Definizione di funzione continua e di continuità da destra e da sinistra.
- Teoremi su somme, prodotti, composizione di funzioni continue. Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.
- Continuità delle funzioni elementari.
- Punti di discontinuità: eliminabile, di 1a e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità.
- Teorema sui punti di discontinuità per le funzioni monotone. - Teorema degli zeri delle funzioni continue (con dim.) e sua applicazione al caso di due funzioni.
- Teorema dei valori intermedi (con dim.).
- Una funzione continua e invertibile su un intervallo è strettamente monotona (con dim.).
- Continuità dell' inversa di una funzione continua invertibile definita su un intervallo (con dim.).
- Funzioni limitate, punti di massimo e minimo assoluto.
- L'immagine di un compatto attraverso una funzione continua è un compatto.
- Massimi e minimi delle funzioni continue su chiusi e limitati: teorema di Weierstrass.

4. Derivate e calcolo differenziale.
- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale.
- Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico.
- Scrittura equivalente della derivabilità di f con o-piccolo.
- Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi.
- f derivabile è continua (con dim.).
- Derivate successive: definizione di derivata n-esima.
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^n, $\sin x$, e^x, $\log x$).
- Regole di derivazione: somma, prodotto (con dim.) e reciproco.
- Derivata di funzioni composte (dim. nel caso $g(x_0) \neq g(x)$, in un intorno di x_0).
- Derivata della funzione inversa (con dim.).
- Calcolo delle derivate.

- Estremi locali e derivate: Definizione di minimo e massimo locale per f.
- Teorema di Fermat (con dim.); definizione di punto critico o stazionario.
- Teorema di Rolle (con dim.), Teorema di Lagrange o del valor medio (con dim.).
- Monotonia e derivata: Criterio di monotonia per funzioni derivabili (con dim.)
- Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo (con dim.).
- Teorema di de l' Hôpital (con dim. solo nel caso di f e g infinitesime e derivabili con derivata continua in x_0 reale e $g'(x_0) \neq 0$).
- Teorema sul limite di f' per calcolare la f' in un punto (con dim.) (p.197 del libro).
- Polinomio di Taylor: definizione.
- Teorema di Peano (con dim. per n=1, n=2); sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari (dim. per e^x, $\sin x$, $\log(1+x)$).
- Uso della formula di Taylor per determinare la natura dei punti stazionari.
- Limiti con gli sviluppi.
- Asintoti di una funzione f.
- Funzioni convesse e concave: definizione. Definizione di flesso.
- Caratterizzazione di f convesse per f derivabili e per f due volte derivabili.
- Teorema: $f''(x_0) = 0$ se x_0 è punto di flesso e f è due volte derivabile in x_0.
- Studio di funzione.

6. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.

- Integrale definito per funzioni limitate. Somme inferiori e somme superiori. Significato geometrico dellintegrale.
- Esempio di funzione limitata ma non integrabile (dim. facoltativa).
- Additività rispetto all' intervallo di integrazione, linearità dellintegrale e confronto; integrali su intervalli orientati.
- Teorema della media per funzioni continue (con dim.).
- Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni monotone, delle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità.
- Primitive di funzioni. Caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione in un intervallo (con dim.).
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Formula fondamentale del calcolo integrale (con dim.), calcolo di integrali definiti mediante primitive.
- Integrazione per parti (con dim.) e per sostituzione (con dim.).
- Integrazione di alcune funzioni razionali (si vedano i casi svolti a lezione), sostituzioni notevoli per l'integrazione di alcune funzioni irrazionali. Integrazione delle funzioni razionali nelle variabili $\sin x$ e $\cos x$ (si vedano casi svolti a lezione).
- Integrali impropri di funzioni continue non negative su intervalli illimitati e di funzioni non negative illimitate su intervalli limitati.
-Condizione necessaria di integrabilità su intervalli illimitati di una funzione che ammetta limite a ∞.
- Teoremi del confronto, del confronto asintotico, del confronto asintotico con $1/x^\alpha$, $x \to +\infty$ o $x \to 0$.
- Convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ e di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$ (con dim.).
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ e di $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, al variare di α e β.

7. Serie numeriche

- Ridotta n-esima, somma di una serie. Serie numeriche convergenti, divergenti e indeterminate.
- La serie geometrica (dim. del suo comportamento).
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.)
- Serie a termini non negativi, esistenza del limite della ridotta n-esima (con dim.).
- Criterio dell'integrale.
- La serie armonica generalizzata (dim. del suo comportamento).
- La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, al variare di α e β.
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi: del confronto, del confronto asintotico, del

rapporto, della radice.
- Convergenza assoluta e convergenza per serie con termini di segno qualsiasi.
- Serie con termini di segno alterno: criterio di convergenza per le serie alternate (di Leibniz).

8. Equazioni differenziali.
- Equazioni differenziali del primo ordine in forma generale, integrale generale. Problema di Cauchy, definizione di soluzione.
- Equazioni del primo ordine lineari, struttura dell'integrale generale (con dim.).
- Equazioni del primo ordine a variabili separabili, formula risolutiva (con dim.).
- Equazioni del primo ordine della forma $y' = f(x)$.
- Equazioni lineari del secondo ordine, struttura dellintegrale generale, soluzioni linearmente indipendenti, combinazione lineare di due soluzioni.
- Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti, formule risolutive mediante le radici dellequazione caratteristica associata.
- Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti, ricerca della soluzione particolare quando il termine noto è un polinomio oppure è della forma $e^{\gamma x}$ oppure della forma $e^{\gamma x} \cos \omega x$, o $e^{\gamma x} \sin \omega x$ o una loro combinazione lineare.

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.