PROGRAMMA svolto nel corso di Analisi Matematica 1

Ingegneria gestionale, meccanica e meccatronica, Vicenza, Canale 3
a.a. 2009-20010, docente: Paola Mannucci

Testo Consigliato:
Analisi Matematica, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, McGraw-Hill Editore.
Appunti di lezione e complementi in rete (http://www.math.unipd.it/ mannucci/).

1. Elementi di base: insiemi, numeri, funzioni, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ (con dim.). Proprietà di Archimede di $\mathbb{Q}$ (con dim.). Definizione dei numeri reali con gli allineamenti decimali. - Proprietà di densità in $\mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Proprietà caratteristiche di sup e inf. Se esiste il massimo esso è unico (con dim.). Proprieta' di completezza di $\mathbb{R}$.
- La disuguaglianza triangolare.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Principio di induzione. Esempi di dimostrazioni per induzione, disuguaglianza di Bernoulli (con dim.).
- Fattoriali, coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton.
- Funzioni: definizione di funzione, dominio, codominio, immagine, grafico.
- Funzioni limitate superiormente, inferiormente, limitate. Caratterizzazione del sup e inf di funzioni.
- Funzione iniettiva e suriettiva, composizione di funzioni, funzione inversa, funzione monotona, crescente, decrescente, composizione di funzioni monotone. Una funzione strettamente monotona è invertibile.
- Funzioni pari e dispari, funzioni periodiche.
- Operazioni con le funzioni.
- Funzioni lineari. Potenze ad esponente naturale, radici n-esime in $\mathbb{R}$; - potenze ad esponente intero, razionale, reale, loro grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro proprietà.
- Funzioni iperboliche e loro inverse.

2. Limiti per funzioni di una variabile.

- Intorni: definizione di distanza, distanza euclidea, intorno di x_0 reale.
- Definizione di retta ampliata e di intorno di $\pm\infty$.
- Definizione di punto di accumulazione e di punto isolato. Teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi limitati ed infiniti.
- Definizione di proprietà che una funzione possiede "definitivamente" per $x \to x_0$.
- Insiemi aperti e chiusi: definizione di punto interno, esterno, di frontiera ad un insieme. Definizione di insieme aperto e insieme chiuso.
- Limite: definizione di limite (con gli intorni ed esplicita, sia per x_0 ed l reali che infiniti ($\forall\varepsilon \quad \exists\delta$..., ecc..).
- Teorema di unicità del limite (con dim.).
- Proprietà dei limiti: limitatezza locale delle funzioni con limite finito (con dim.).
- Teorema di permanenza del segno (con dim., nel caso di limite reale), Teorema del confronto (dei "Carabinieri") (con dim. nel caso di limite reale).
- Definizione di limite destro e sinistro.
- Teoremi di calcolo: limite di somme (con dim.), prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata (con dim.).
- Limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita. Forme indeterminate.
-Teorema di esistenza del limite dx e sx per funzioni monotone (con dim. nel caso di f crescente e limite sinistro).

- Limiti delle funzioni elementari.
-Teorema sul limite di funzione composta (con dim.).
- Primi limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e derivati.
- Scala di funzioni infinite a $+\infty$.
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \to x_0$. Funzioni infinite o infinitesime non confrontabili per $x \to x_0$.
- Funzioni asintotiche per $x \to x_0$. Funzioni campione e concetto di ordine di infinito o infinitesimo rispetto al campione per $x \to x_0$.
- Definizione di o piccolo per limiti di funzioni.

2. Limiti di successioni.
- Successioni a valori in $\mathbf{R}$: definizione di limite di successione.
- Successione convergente, divergente e irregolare. Teoremi sui limiti di successione (riformulazione dei teoremi sulle funzioni).
- Scala di successioni infinite. - Limite della successione geometrica (con dim.).
- Esistenza del limite di successioni monotone. e sue applicazioni.
- Sottosuccessioni: definizione. Teorema: una successione ha limite l se e solo se tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite.
- Definizione di e come limite di successione.
- Criterio del rapporto per successioni a termini positivi (con dim.).
- Uguaglianza tra il limite del rapporto e il limite della radice n-esima per successioni a termini positivi.
- Ulteriori limiti di funzioni notevoli (derivati dalla definizione di e): $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{log(x+1)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$ $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, quando $x \to 0$ (con dim.).
- Enunciato del Teorema-ponte tra il limite di $f(x)$ e il limite di successioni. Criterio di non esistenza del limite.

7. Serie numeriche
- Ridotta n-esima, somma di una serie. Serie numeriche convergenti, divergenti e indeterminate.
- La serie geometrica (dim. del suo comportamento).
- Le serie telescopiche.
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.).
- Serie a termini non negativi, esistenza del limite della ridotta n-esima (con dim.).
- La serie armonica generalizzata.
- La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, al variare di α e β.
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi: del confronto (con dim.), del confronto asintotico, del rapporto, della radice.
- Convergenza assoluta e convergenza per serie con termini di segno qualsiasi.
- Serie con termini di segno alterno: criterio di convergenza per le serie alternate (di Leibniz).

3. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
- Definizione di funzione continua e di continuità da destra e da sinistra.
- Teoremi su somme, prodotti, composizione di funzioni continue. Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.
- Continuità delle funzioni elementari.
- Punti di discontinuità: eliminabile, di 1a e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità.
- Teorema sui punti di discontinuità per le funzioni monotone (con dim.). - Teorema degli zeri delle funzioni continue (con dim.).
- Teorema dei valori intermedi (con dim.).
- Una funzione continua e invertibile su un intervallo è strettamente monotona.
- Continuità dell' inversa di una funzione continua invertibile definita su un intervallo.
- Massimi e minimi delle funzioni continue su chiusi e limitati: teorema di Weierstrass.

4. Derivate e calcolo differenziale.
- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale.
- Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico.

- Scrittura equivalente della derivabilità di f con o-piccolo.
- Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi.
- f derivabile è continua (con dim.).
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^n, $\sin x$, e^x, $\log x$).
- Regole di derivazione: somma, prodotto (con dim.) e quoziente.
- Derivata di funzioni composte (dim. nel caso $g(x_0) \neq g(x)$, in un intorno di x_0).
- Derivata della funzione inversa (con dim.).
- Calcolo delle derivate.
- Derivate successive: definizione di derivata n-esima.
- Estremi locali e derivate: Definizione di punto di minimo e massimo locale per f.
- Teorema di Fermat (con dim.); definizione di punto critico o stazionario.
- Teorema di Rolle (con dim.), Teorema di Lagrange o del valor medio (con dim.).
- Monotonia e derivata: Criterio di monotonia per funzioni derivabili (con dim.)
- Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo (con dim.).
- Funzioni convesse e concave: definizione. Definizione di flesso.
- Caratterizzazione di f convesse per f due volte derivabili.
- Teorema: $f''(x_0) = 0$ se x_0 è punto di flesso e f è due volte derivabile in x_0.
- Teorema di de l' Hôpital (con dim. solo nel caso di f e g infinitesime e derivabili con derivata continua in a reale e $g'(x_0) \neq 0$).
- Teorema sul limite di f' per calcolare la f' in un punto. (p.197 del libro).
- Polinomio di Taylor: definizione.
- Teorema di Peano (con dim. per n=1, n=2); sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari (dim. per e^x, $\sin x$).
- Limiti con gli sviluppi.
- Asintoti di una funzione f.
- Studio di funzione.

6. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.

- Integrale definito per funzioni limitate. Somme inferiori e somme superiori. Significato geometrico dellintegrale.
- Esempio di funzione limitata ma non integrabile (dim. facoltativa).
- Additività rispetto all' intervallo di integrazione, linearità dellintegrale e confronto; integrali su intervalli orientati.
- Teorema della media per funzioni continue (con dim.).
- Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni monotone, delle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità.
- Primitive di funzioni. Caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione in un intervallo (con dim.).
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Formula fondamentale del calcolo integrale (Corollario del teorema fond. calc. integrale) (con dim.), calcolo di integrali definiti mediante primitive.
- Integrazione per parti (con dim.) e per sostituzione (con dim.).
- Integrazione di alcune funzioni razionali (si vedano i casi svolti a lezione), sostituzioni notevoli per l'integrazione di alcune funzioni irrazionali.
- Integrali impropri di funzioni continue non negative su intervalli illimitati e di funzioni non negative illimitate su intervalli limitati.

-Condizione necessaria di integrabilità su intervalli illimitati di una funzione che ammetta limite a ∞.
- Teoremi del confronto, del confronto asintotico, del confronto asintotico con $1/x^\alpha$, $x \to +\infty$ o $x \to 0$.
- Convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ e di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$ (con dim.).
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ e di $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, al variare di α e β.

6. Funzioni di più variabili reali.

- Definizione di funzione di n variabili reali a valori scalari, dominio. Grafico per funzioni di due variabili.

- Definizione di funzione di n variabili reali a valori vettoriali.
- Definizione di prodotto scalare , norma e distanza in R^n. Definizione di intorno sferico di un punto $x \in R^n$, concetti base di topologia.
- Definizione di limite per funzioni di n variabili a valori scalari, definizione di funzione continua in un punto x_0. Calcolo dei limiti in R^2 con le coordinate polari, metodi per provare la non esistenza del limite.
- Definizione dell' elemento ∞ e dei suoi intorni.
- Derivate parziali e derivabilità di una funzione. Derivate direzionali e loro rappresentazione per le funzioni differenziabili.
- Derivate seconde di una funzione in due variabili e matrice hessiana. Teorema di Schwarz.
- Definizione di funzione differenziabile per una funzione in due variabili. Equazione del piano tangente al grafico. Se una funzione è differenziabile in un punto allora è continua in quel punto (dim.). Teorema del differenziale totale.
- Punti critici di una funzione in più variabili. Condizione necessaria per l'esistenza di punti di estremo locale nei punti in cui la funzione è differenziabile.
- Estremi liberi: condizioni sufficienti individuare la natura dei punti critici attraverso lo studio del segno dell'hessiana.

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.