PROGRAMMA di Analisi Matematica 1

Ingegneria gestionale, meccanica e meccatronica, Vicenza, Canale 3
a.a. 2011-2012, docente: Paola Mannucci

Testo Consigliato:
Analisi Matematica 1 e 2, M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Zanichelli.
Appunti di lezione e complementi in rete (http://www.math.unipd.it/ mannucci/).

1. Numeri

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. - $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).
-Radici $n-$ esime, potenze e logaritmi.
- Valore assoluto, disuguaglianza triangolare (con dim.).
- Sommatorie e loro proprietà.
- Fattoriali, coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton.
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Proprietà caratteristiche di sup e inf.
- Proprieta' dell'estremo superiore in $\mathbb{R}$.
- Principio di induzione. Esempi di dimostrazioni per induzione, disuguaglianza di Bernoulli (con dim.).

1. Funzioni di una variabile

- Funzioni: definizione di funzione, dominio, codominio, immagine, grafico.
- Funzioni limitate superiormente, inferiormente, limitate.
- Funzioni pari e dispari, funzioni monotone, funzioni periodiche.
- Funzioni elementari: funzioni potenza ad esponente naturale, intero, razionale, reale, loro grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
Funzioni trigonometriche e funzioni iperboliche. - Composizione di funzioni, composizione di funzioni monotone.
- Funzione iniettiva, funzione invertibile e funzione inversa. Una funzione strettamente monotona è invertibile e la sua inversa è strettamente monotona (con dim.).
- Funzioni trigonometriche inverse e loro proprietà.
- Funzioni inverse di funzioni iperboliche.

2. Limiti e continuità.

Limiti di successioni.
- Successioni a valori in $\mathbf{R}$: definizione di limite di successione.
-Teorema di unicità del limite. (con dim.)
- Successione convergente, divergente e irregolare.
- Limitatezza delle successioni convergenti (con dim.).
- Teorema di permanenza del segno (con dim.), teorema del confronto (dei "Carabinieri") (con dim.).
- Teoremi di calcolo: limite di somme (con dim.), prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Limite del prodotto di una successione infinitesima per una limitata (con dim.).
- Limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una successione è infinita.
- Forme di indecisione.
-Teorema di esistenza del limite per successioni monotone (con dim. nel caso di successione crescente) e sue applicazioni.
- Limite della successione geometrica.
- Definizione di e come limite di successione.
- Criterio del rapporto per successioni a termini positivi (con dim.).
- Scala degli infiniti $\log_a n$, n^α, a^n, $n!$, n^n (con dim. dei rapporti tra le ultime 3).

Limiti di funzioni.
- Definizione di intorno di x_0 reale e di intorno di $\pm\infty$.

- Definizione topologica di limite (con gli intorni ed esplicita, sia per x_0 ed l reali che infiniti ($\forall\varepsilon \quad \exists\delta$..., ecc..).
- Definizione di limite di funzione attraverso la definizione di limite di successione.
- Criterio di non esistenza del limite di una funzione. La funzione $\sin x$ non ha limite per $x \to +\infty$ (con dim.). - Teorema di unicità del limite (con dim.).
- Teorema di permanenza del segno, Teorema del confronto.
- Limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata.
- Teoremi di calcolo: limite di somme, prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita. Forme indeterminate.
- Definizione di limite destro e sinistro.
- Limiti delle funzioni elementari.
-Teorema sul limite di funzione composta (con dim.).
- Primi limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e derivati (con dim.).
- Ulteriori limiti di funzioni notevoli (derivati dalla definizione di e): $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{log(x+1)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$ $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, quando $x \to 0$ (tutti con dim.).
- Scala di funzioni infinite a $+\infty$.
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \to x_0$. Funzioni infinite o infinitesime non confrontabili per $x \to x_0$.
- Funzioni asintotiche per $x \to x_0$.

Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

- Definizione di funzione continua e di continuità da destra e da sinistra.
- Teoremi su somme, prodotti, composizione di funzioni continue.
- Continuità delle funzioni elementari.
- Punti di discontinuità: eliminabile, di 1a e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità.
- Teorema degli zeri delle funzioni continue (con dim.).
- Massimi e minimi delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati: teorema di Weierstrass. - Teorema dei valori intermedi (con dim.).
- Teorema sui punti di discontinuità per le funzioni monotone.
- Continuità dell' inversa di una funzione continua invertibile definita su un intervallo.

3. Derivate e calcolo differenziale.

- Rapporto incrementale e derivata per funzioni reali di variabile reale.
- Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico.
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^α, $\sin x$, e^x, $\log x$).
- f derivabile è continua (con dim.) e non vale il viceversa (con controesempio).
- Regole di derivazione: somma, prodotto (con dim.) e quoziente.
- Derivata di funzioni composte (dim. nel caso $f'(x_0) \neq 0$).
- Derivata della funzione inversa (con dim.).
- Calcolo delle derivate.
- Derivate successive: definizione di derivata n-esima.
- Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale.
- Estremi locali e derivate: Definizione di punto di minimo e massimo locale per f.
- Teorema di Fermat (con dim.); definizione di punto stazionario.
- Teorema di Lagrange o del valor medio (con dim.).
- Teorema sul limite destro (o sinistro) di f' per calcolare la f' destra (o sinistra) in un punto. (Teorema 4.9 p.191 del libro).
- Monotonia e derivata: Test di monotonia per funzioni derivabili (con dim.)
- Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo (con dim.).
- Funzioni convesse e concave: definizione.
- Caratterizzazione di f convesse in un intervallo per f due volte derivabili in tale intervallo.
- Definizione di flesso.
- Teorema: se x_0 è punto di flesso e f è due volte derivabile in x_0 allora$f''(x_0) = 0$.

- Asintoti di una funzione f.
- Studio del grafico di una funzione.
- Teorema di de l' Hôpital (con dim. solo nel caso di f e g infinitesime e derivabili con derivata continua in a reale).
-Definizione di "o piccolo" per limiti di funzioni e sue proprietà. - Polinomio di Mc Laurin e di Taylor: definizione.
- Teorema della formula di Mc Laurin con resto di Peano (con dim. per n=1, n=2); sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari (dim. per e^x, $\sin x$).
- Limiti con gli sviluppi di Mc Laurin.
- Studio delle derivate successive fino all'ordine n, in un punto stazionario x_0 per determinarne la natura.

6. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.
- Integrale definito per funzioni limitate. Somme di Cauchy-Riemann. Significato geometrico dellintegrale.
- Esempio di funzione limitata ma non integrabile (con dim.).
- Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni monotone e limitate.
- Linearità dellintegrale, additività rispetto all' intervallo di integrazione e monotonia; integrali su intervalli orientati.
- Teorema della media integrale per funzioni continue (con dim.).
- Primitive di funzioni e integrale indefinito. Tutte le primitive di una funzione in un intervallo differiscono tra di loro per una costante (con dim.).
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Corollario del teorema fond. calc. integrale per il calcolo di integrali definiti mediante primitive (con dim.).
- Integrazione per parti (con dim.) e per sostituzione (con dim.).
- Integrazione di alcune funzioni razionali (si vedano i casi svolti a lezione).
- Sostituzioni notevoli per l' integrazione di alcune funzioni irrazionali.
- Integrali generalizzati di funzioni illimitate su intervalli limitati.
- Integrale generalizzato di funzioni non negative: esistenza del limite, finito o infinito (con dim.).
- Teoremi del confronto (con dim.), del confronto asintotico, per funzioni non negative.
- Convergenza di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$ (con dim.).
- Convergenza di $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}$, e di $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ al variare di $\alpha > 0$.
-Confronto asintotico con $1/x^\alpha$, $x \to 0$.
- Integrali generalizzati di funzioni continue su intervalli illimitati. - Condizione necessaria di integrabilità su intervalli illimitati di una funzione che ammetta limite a ∞.
- Teoremi del confronto, del confronto asintotico, per funzioni non negative.
- Confronto asintotico con $1/x^\alpha$, $x \to +\infty$.
- Convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ (con dim.).
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ e di $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}$, al variare di α e β.

7. Serie numeriche
- Successione delle somme parziali o delle ridotte, somma di una serie. Serie numeriche convergenti, divergenti e irregolari.
- La serie geometrica (dim. del suo comportamento).
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.).
- Le serie telescopiche.
- Serie a termini non negativi, esistenza del limite della ridotta n-esima (con dim.).
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi:dell'integrale, del confronto (con dim.), del confronto asintotico, del rapporto (con dim.), della radice.
- Applicazione del criterio dell'integrale alla convergenza della serie armonica e della serie armonica generalizzata (con dim.).
- La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, al variare di α e β.

- Convergenza assoluta e convergenza per serie con termini di segno qualsiasi.
- La convergenza assoluta implica la convergenza (semplice) (con dim.) - Serie con termini di segno alterno: criterio di convergenza di Leibniz.

6. Funzioni di più variabili reali. (nel Volume 2)
- Definizione di funzione di n variabili reali a valori scalari, dominio. Grafico per funzioni di due variabili.
- Definizione modulo (o norma) e di distanza in R^n. Definizione di intorno sferico di un punto $x_0 \in R^n$.
- Concetti base di topologia: punto interno, esterno, di frontiera, insieme aperto, chiuso, insieme limitato e illimitato.
- Caratterizzazione degli insieme aperti e chiusi mediante funzioni continue (Teorema 3.5, Vol.2)
- Definizione di limite per funzioni di n variabili a valori scalari, definizione di funzione continua in un punto x_0.
- Teorema di Weierstrass per le funzioni continue su chiusi e limitati.
- Calcolo dei limiti in R^2 con le coordinate polari, metodi per provare la non esistenza del limite.
- Derivate parziali, gradiente e derivabilità di una funzione.
- Derivate seconde di una funzione in due variabili e matrice hessiana. Teorema di Schwarz.
- Definizione di funzione differenziabile per una funzione in due variabili. Equazione del piano tangente al grafico.
- Se una funzione è differenziabile in un punto allora è continua in quel punto (con dim.).
- Condizione sufficiente di differenziabilità di una funzione.
- Derivate direzionali e loro rappresentazione per le funzioni differenziabili.

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.