PROGRAMMA del corso di Istituzioni di Analisi Matematica

Corsi di laurea in Scienze Statistiche, matricole PARI
Paola Mannucci, a.a. 2015-2016

Testo Consigliato:
Analisi Matematica, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, McGraw-Hill Editore.
Appunti di lezione e complementi in rete (http://www.math.unipd.it/ mannucci/) e su MOODLE del Dipartimento di Statistica (chiave di accesso da richiedere alla docente)

1. Elementi di base: insiemi, numeri, funzioni, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$. Proprietà di Archimede di $\mathbb{Q}$.
- Definizione dei numeri reali con gli allineamenti decimali. Proprietà di densità in $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Caratterizzazione di sup e inf.
- Se esiste il massimo esso è unico (con dim.).
- Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.
- La disuguaglianza triangolare.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Fattoriali, coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton.
- Funzioni: definizione di funzione, dominio, codominio, immagine, grafico.
- Funzioni limitate superiormente, inferiormente, limitate.
- Funzioni pari e dispari, funzioni periodiche.
- Funzione iniettiva e suriettiva, composizione di funzioni, funzione inversa, funzione monotona, strettamente monotona, crescente, decrescente.
- Una funzione strettamente monotona è invertibile (con dim.).
- Operazioni con le funzioni.
- Funzioni lineari. Potenze ad esponente naturale, radici n-esime in $\mathbb{R}$;
- Potenze ad esponente intero, razionale, reale e loro grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni iperboliche e loro inverse.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro proprietà.

2. Limiti per funzioni di una variabile.

- Intorni: definizione di distanza euclidea, intorno di x_0 reale.
- Definizione di retta ampliata $\mathbb{R}^*$ e di intorno di $\pm\infty$.
- Definizione di punto di accumulazione. Teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi limitati ed infiniti.
- Insiemi aperti e chiusi: definizione di punto interno, esterno, di frontiera ad un insieme. Definizione di insieme aperto e insieme chiuso.
- Limite: definizione di limite (con gli intorni ed esplicita, sia per x_0 ed l reali che infiniti ($\forall\varepsilon \quad \exists\delta$..., ecc..).
- Teorema di unicità del limite.
- Proprietà dei limiti: limitatezza locale delle funzioni con limite finito.
- Teorema di permanenza del segno, Teorema del confronto (dei "Carabinieri").
- Definizione di limite destro e sinistro.
- Operazioni sui limiti: limite di somme, prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Aritmetizzazione parziale dei limiti: limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita, limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata.
- Forme indeterminate.
- Teorema di esistenza del limite dx e sx per funzioni monotone.
- Limiti delle funzioni elementari.
- Teorema sul limite di funzione composta.

- Primi limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (con dim.) e derivati.
- Scala di funzioni infinite a $+\infty$: $\log_a x$, x^α, a^x.
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \to x_0$.
- Funzioni asintotiche per $x \to x_0$.
- Definizione di o piccolo per limiti di funzioni.

3. Limiti di successioni.
- Successioni a valori in **R**: definizione di limite di successione.
- Successione convergente, divergente e irregolare e definizione con gli intorni.
- Teoremi sui limiti di successione (riformulazione dei teoremi sulle funzioni).
- Scala di successioni infinite. - Limite della successione geometrica.
- Esistenza del limite di successioni monotone e sue applicazioni.
- Definizione di e come limite di successione.
- Ulteriori limiti di funzioni notevoli (derivati dalla definizione di e): $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{log(x+1)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$, $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, quando $x \to 0$ (con dim.).
- Criterio del rapporto e della radice per successioni a termini positivi.

4. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
- Definizione di funzione continua e di continuità da destra e da sinistra.
- Teoremi su somme, prodotti, composizione di funzioni continue. Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.
- Continuità delle funzioni elementari.
- Punti di discontinuità: eliminabile, di 1a e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità.
- Teorema sui punti di discontinuità per le funzioni monotone. - Teorema degli zeri delle funzioni continue.
- Teorema dei valori intermedi.
- Continuità dell' inversa di una funzione continua invertibile definita su un intervallo.
- Funzioni limitate, punti di massimo e minimo assoluto.
- Massimi e minimi delle funzioni continue su chiusi e limitati: teorema di Weierstrass.

5. Derivate e calcolo differenziale.
- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale.
- Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico.
- Scrittura equivalente della derivabilità di f con o-piccolo.
- Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale.
- f derivabile è continua (con dim.).
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^n, $\sin x$, e^x, $\log x$).
- Regole di derivazione: somma, prodotto e quoziente.
- Derivata di funzioni composte.
- Derivata della funzione inversa. Derivata del $\log x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ come funzioni inverse (con dim.)
- Calcolo delle derivate.
- Teorema sul limite di f' per calcolare la f' in un punto. (p. 204 del libro).
- Derivate successive: definizione di derivata n-esima.
- Estremi locali e derivate: definizione di punto di minimo e massimo locale per f.
- Teorema di Fermat (con dim.); definizione di punto critico o stazionario.
- Teorema di Rolle (con dim.), Teorema di Lagrange o del valor medio.
- Monotonia e derivata: Criterio di monotonia per funzioni derivabili (con dim.).
- Teorema della derivata nulla (con dim.).
- Asintoti orizzontale, verticale e obliquo di una funzione f.
- Funzioni convesse e concave: definizione. Definizione di flesso.
- Caratterizzazione di f convesse per f due volte derivabili.
- Teorema: se x_0 è punto di flesso e f è due volte derivabile in x_0 allora $f''(x_0) = 0$.
- Studio del grafico di una funzione.
- Teorema di de l' Hôpital.

- Polinomio di Taylor: definizione.
- Teorema di Peano; sviluppi di Taylor (dette anche Mac Laurin) delle funzioni elementari (dim. per e^x, $\sin x$).
- Limiti con gli sviluppi di Taylor.

6. Serie numeriche

- Successione delle somme parziali (somme ridotte), somma di una serie. Definizione di serie numerica convergente, divergente e irregolare (indeterminata).
- La serie geometrica di ragione q (dim. del suo comportamento).
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.).
- Serie a termini non negativi. Una serie a termini positivi non può mai essere irregolare (con dim.).
- La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, al variare di α.
- La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, al variare di α e β.
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi: del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, della radice.
- Definizione di convergenza assoluta per serie con termini di segno qualsiasi. Relazione con la convergenza.
- Serie con termini di segno alterno: criterio di convergenza di Leibniz.

7. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.

- Integrale definito per funzioni limitate. Somme inferiori e somme superiori. Definizione di integrale di Riemann. Significato geometrico dell' integrale.
- Esempio di funzione limitata ma non integrabile (dim. facoltativa).
- Proprietà dell'integrale: linearità, confronto, additività rispetto all' intervallo di integrazione;
- Teorema della media integrale per funzioni continue.
- Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni monotone, delle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità.
- Definizione di primitiva di una funzione.
- Se F è una primitiva di f allora anche $F + k$ (k costante) è una primitiva di f (con dim.).
- Se F_1 e F_2 sono due primitive di f allora $F_1 = F_2 + k$ (k costante) (con dim.).
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.): calcolo di integrali definiti mediante primitive.
- Integrazione per parti (con dim.) e per sostituzione.
- Integrazione di alcune funzioni razionali (si vedano i casi svolti a lezione).
- Sostituzioni notevoli per l'integrazione di alcune funzioni irrazionali ($\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$).
- Integrali generalizzati di funzioni continue non negative su intervalli illimitati.
- Condizione necessaria di integrabilità su intervalli illimitati di una funzione che ammetta limite a ∞.
- Integrali generalizzati di funzioni continue non negative illimitate su intervalli limitati del tipo $(a, b]$.
- Teoremi del confronto, del confronto asintotico, per $x \to +\infty$ o $x \to a^+$.
- Convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ e di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$ (con dim. nel caso $\alpha = 1$).
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ e di $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}$, al variare di α e β.

8. Funzioni di più variabili reali.

- Definizione di funzione di 2 o 3 variabili reali a valori reali, dominio. Grafico per funzioni di due variabili.
- Definizione di prodotto scalare.
- Definizione di intorno di un punto $(x, y) \in R^2$.
- Definizione di limite per funzioni di due variabili a valori reali, definizione di funzione continua in un punto (x_0, y_0).
- Concetti base di topologia in R^2: punti interni, aperti, chiusi, limitati.
- Derivate parziali e derivabilità di una funzione.
- Definizione di funzione differenziabile per una funzione in due variabili. Equazione del piano tangente al grafico.
- Se una funzione è differenziabile in un punto allora è continua in quel punto (con dim.).

- Teorema del differenziale totale.
- Derivate direzionali e loro rappresentazione per le funzioni differenziabili (formula del gradiente).
- Derivate seconde di una funzione in due variabili e matrice Hessiana. Teorema di Schwarz.
- Punti critici di una funzione in più variabili. Condizione necessaria per l'esistenza di punti di estremo locale nei punti in cui la funzione è differenziabile.
- Estremi liberi: condizioni sufficienti per individuare la natura dei punti critici attraverso lo studio del segno dell'Hessiana per funzioni in due variabili. - Estremi vincolati: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e il metodo diretto se il vincolo è esplicitabile.
- Definizione di estremo locale vincolato. Definizione di punto regolare vincolato.
- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
- Ricerca di estremi di una funzione in un dominio con interno non vuoto.

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.