PROGRAMMA del corso di Matematica A

Area dell'Informazione, gruppi 6/7
a.a. 2003-2004, docente: Paola Mannucci

1. Insiemi, numeri, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore. Proprietà caratteristiche di sup e inf. Se l'estremo superiore esiste, è unico (con dim.). Se esiste il massimo esso coincide con l'estremo superiore (con dim.)
- Funzioni: definizione, composizione, funzione iniettiva e suriettiva, funzione inversa.
- Numeri naturali, principio dinduzione. Esempi di dimostrazioni per induzione.
- Fattoriali, coefficienti binomiali. Permutazioni di n oggetti. Operazioni sui coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton. Somma della progressione geometrica (con dim.).
- Numeri interi e razionali. Proprietà di densità, proprietà di Archimede.
- Definizione dei numeri reali. Completezza di $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).
- Rappresentazione geometrica dei numeri reali e dei grafici di funzione.
- Radici n-esime in $\mathbb{R}$; potenze ad esponente reale, loro proprietà e grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro proprietà.
- I numeri complessi: operazioni e loro interpretazione geometrica. Coniugato e modulo.
- Forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei complessi.
- Potenze e radici n-esime in $\mathbb{C}$; soluzione di equazioni di 2o grado.
- Polinomi a coefficienti complessi: divisione con resto, teorema di Ruffini (con dim.), teorema fondamentale dell'algebra, principio di identità dei polinomi. Polinomi a coefficienti reali.

2. Limiti di funzioni.

- Elementi di topologia in $\mathbb{R}$: punti interni, esterni, di frontiera, intorno, punto di accumulazione, aperto, chiuso, chiusura di un insieme, compatto. - Funzioni limitate, punti di massimo e minimo assoluto.
- Definizione generale di limite di funzioni reali di una variabile reale mediante gli intorni.
- Unicità del limite (con dim.). - Limitatezza in un intorno di x_0 di una funzione che ha limite finito per $x \to x_0$ (con dim.).
- Limite destro e sinistro.
- Teoremi della permanenza del segno (con dim.), del confronto (con dim.).
- $\lim_{x\to 0} sinx/x$ (con dim.)
- Limiti di somme (con dim.), prodotti (con dim.) e quozienti (con dim.); forme indeterminate.
- Limiti di polinomi e di funzioni razionali.
- Limiti di funzioni composte. Cambio di variabili nei limiti.
- Esistenza del limite di funzioni monotone.
- Confronti di infinitesimi ed infiniti, simboli o, (o piccolo); principio di sostituzione di infinitesimi ed infiniti e uso degli sviluppi asintotici nel calcolo delle forme indeterminate.
- Limiti notevoli e confronti asintotici delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, log...).

3. Successioni.

- Limiti di successioni, successioni convergenti, divergenti e indeterminate.
- Limite della successione geometrica.
- Limitatezza delle successioni convergenti . Teoremi della permanenza del segno, del confronto.
- Limiti di somme, prodotti e quozienti; forme di indecisione.
- Esistenza del limite di successioni monotone (con dim.) e sue applicazioni. La successione $(1 + 1/n)^n$ è crescente (con dim.). Definizione del numero e.
- Confronti di infinitesimi ed infiniti.
- Confronti asintotici delle successioni elementari (log, potenze, esponenziali, fattoriale), $a^n/n!$ e $n!/n^n$

sono infinitesime (con dim.).
- Teorema ponte tra limiti di funzioni e limiti di successioni.
- $(1 + 1/x)^x \to e$ se $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ (con dim.). Non esistenza di alcuni limiti ($\sin x$, $x \sin x$, per $x \to +\infty$). - Limiti notevoli per $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{log(x+1)}{x}$, $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, quando $x \to 0$ (con dim.).
- Funzioni iperboliche e loro inverse.

4. Funzioni continue.
- Definizione di funzione continua. Continuità di somma, prodotto e rapporto di funzioni continue, funzioni composte.
- Continuità delle funzioni elementari (dim. nel caso $\sin x$, a^x, x^α). - Punti di discontinuità: eliminabile, di 1a e di 2a specie.
- Teorema degli zeri delle funzioni continue (con dim.), teorema dei valori intermedi.
- Continuità dell inversa di una funzione continua invertibile definita su un intervallo.
- Massimi e minimi delle funzioni continue: teorema di Weierstrass.

5. Calcolo differenziale.
- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale. Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico. - Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi.
- Legami tra derivabilità e continuità (con dim.). Derivate successive.
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^α, $\sin x$, e^x, $logx$) . - Regole di derivazione: somma, prodotto (con dim.) e reciproco (con dim.).
- Derivata di funzioni composte. Derivata della funzione inversa (con dim.).
- Massimi e minimi locali di funzioni derivabili: teorema di Fermat (con dim.).
- Teorema di Lagrange (o del valor medio).
- Teorema della derivata nulla (con dim.).
- Teorema di Rolle (con dim.) - Test di monotonia per funzioni derivabili (con dim.), condizioni sufficienti per i massimi e minimi locali.
- Teorema di De L Hopital.
- Formula di Taylor col resto di Peano (dim. per le formule di ordine 1 e 2) .
- Sviluppi asintotici delle funzioni elementari.
- Formula di Taylor col resto di Lagrange, stima dellerrore nel calcolo delle funzioni elementari (cenni).
- Condizioni sufficienti di estremo locale per funzioni due volte derivabili in un punto.(con dim.) - Funzioni convesse.
- Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili e per funzioni due volte derivabili. Flessi. Condizione necessaria per i flessi in punti in cui la funzione è due volte derivabile.
- Asintoti orizzontali, verticali, obliqui.
- Determinazione del grafico di una funzione. Ricerca degli zeri di funzioni derivabili attraverso lo studio della monotonia.

6. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.
- Integrale definito per funzioni limitate. Somme inferiori e somme superiori. Trapezoide associato ad una funzione non negativa e significato geometrico dellintegrale.
- Linearità e monotonia dellintegrale; integrabilità del modulo. Additività rispetto allintervallo di integrazione, integrali su intervalli orientati.
- Teorema della media integrale per funzioni integrabili e per funzioni continue (con dim.).
- Primitive di funzioni. Caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione (con dim.).
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.), esistenza di primitive di una funzione continua.
- Calcolo di integrali definiti mediante primitive (integrale indefinito)(con dim.).
- Integrazione per parti (con dim.) e per sostituzione (con dim.).
- Integrazione di alcune funzioni razionali mediante rappresentazione in fratti semplici, sostituzioni notevoli per lintegrazione di alcune funzioni irrazionali.
- Integrali in senso improprio di funzioni illimitate su intervalli limitati o di funzioni continue su intervalli

illimitati.
- Integrali impropri di funzioni non negative: teoremi del confronto e del confronto asintotico.
- Convergenza assoluta e convergenza per gli integrali impropri.

7. Serie numeriche

- Ridotta n-esima, somma di una serie. Serie numeriche convergenti, divergenti e indeterminate.
- La serie geometrica (dim. del suo comportamento).
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.)
- Serie a termini non negativi e loro criteri di convergenza: dellintegrale, del confronto (con dim.), del confronto asintotico, della radice, del rapporto.
- La serie armonica generalizzata (dim. del suo comportamento).
- Convergenza assoluta e convergenza.
- Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz.
- Serie di Taylor ed esempi.
- La serie esponenziale converge a e^x in $\mathbb{R}$ (con dim.).

8. Equazioni differenziali.

- Equazioni differenziali del primo ordine in forma generale, integrale generale. Problema di Cauchy, definizione di soluzione.
- Equazioni del primo ordine lineari, struttura dell'integrale generale, formula risolutiva.
- Equazioni del primo ordine a variabili separabili, formula risolutiva.
- Equazioni lineari del secondo ordine, struttura dellintegrale generale, soluzioni indipendenti, combinazione lineare di due soluzioni.
- Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti, formule risolutive mediante le radici dellequazione caratteristica associata.
- Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti, ricerca della soluzione particolare quando il termine noto è un polinomio oppure è della forma $e^{\lambda x}\cos\beta x$, o $e^{\lambda x}\sin\beta x$ o una loro combinazione lineare.

9. Funzioni in più variabili

- Definizione di distanza in R^2. Definizione di intorno sferico.
- Funzioni in due variabili a valori reali: definizione di limite mediante gli intorni, funzioni continue. Calcolo di alcuni limiti, esempi di non esistenza di limiti.
- Derivate parziali per funzioni in più variabili. Gradiente.

Testo consigliato
M. Bertsch, R. Dal Passo: Elementi di Analisi Matematica, Aracne.
Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione.
Tra i vari testi di esercizi si segnalano i testi di
Marcellini e Sbordone Esercitazioni di matematica (ed. Liguori),
S. Salsa, A. Squellati Esercizi di matematica (ed. Zanichelli)
G. De Marco e C. Mariconda Esercizi di calcolo in una variabile (ed. Decibel-Zanichelli),
O. Stefani, A. Zanardo " Complessi e Polinomi", Dispensa.
O. Stefani, A. Zanardo " Disequazioni", Cortina.
L orario di ricevimento del docente nel suo studio o in P3 (Dipartimento di Matematica P. e A., 4o piano di via Belzoni 7, martedì ore 12–13.30) resta in vigore fino a gennaio, salvo diverso avviso ed escluse le sovrapposizioni con gli esami.
Il ricevimento studenti, dopo i primi due appelli, si svolgerà su appuntamento
(049/8275949, mannucci@math.unipd.it).

La docente Paola Mannucci