PROGRAMMA DEFINITIVO del corso di Matematica A

Ingegneria gestionale, meccanica, meccatronica, Vicenza, Canale 1
a.a. 2006-2007, docenti: Francesca Albertini, Paola Mannucci

1. Insiemi, numeri, funzioni elementari.
- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici: definizione dei numeri reali. Assioma di completezza. Numeri naturali, interi e razionali; $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).
- Funzioni: definizione, composizione, iniettiva e suriettiva, funzione inversa, funzione monotona, crescente, decrescente, pari e dispari.
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore. Proprietà caratteristiche di sup e inf. Se esiste il massimo esso è unico (con dim.).
-Proprietà di densità, proprietà di Archimede.
- Radici n-esime in $\mathbb{R}$; potenze ad esponente reale, loro proprietà e grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro proprietà.
- Funzioni iperboliche e loro inverse.
- I numeri complessi: operazioni, coniugato e modulo.
- Forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei complessi.
-Prodotto (con dim.) e quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica. - Potenze e radici n-esime in $\mathbb{C}$; soluzione di equazioni di 2^0 grado.
-Polinomi a coefficienti complessi: teorema fondamentale dell'algebra.
-Principio di induzione. Esempi di dimostrazioni per induzione, disuguaglianza di Bernoulli (con dim.).
-Fattoriali, coefficienti binomiali. Permutazioni di n oggetti. Operazioni sui coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton. Somma della progressione geometrica (con dim.).

2. Limiti di successioni.
- Definizione di limite di successione, successioni convergenti, divergenti e non regolari.
- Unicità del limite (con dim.). - Limitatezza delle successioni convergenti (con dim.). - Limiti di somme (con dim.), prodotti (con dim.) e quozienti ; forme indeterminate.
- Teoremi della permanenza del segno (con dim.), dei carabinieri (con dim.).
- Limite della successione geometrica (con dim.).
- $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$.
- Limite di una successione limitata per una infinitesima (con dim.).
$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0$ se a_n è una successione infinitesima (con dim.).
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ se a_n è una successione infinitesima, $a_n \neq 0$.
- Esistenza del limite di successioni monotone (con dim. nel caso di successione limitata e crescente) e sue applicazioni.
La successione $(1 + 1/n)^n$ è crescente (dim. facoltativa). Definizione del numero e.
- Infiniti di ordine crescente ($\log n$, n^b, a^n, $n!$, n^n). Criterio del rapporto per successioni. $n!/n^n$ è infinitesima (con dim.).
- Confronti di infiniti.
- Limiti di polinomi e quozienti di polinomi in n. Definizione di o (o piccolo) per i limiti di successioni.

3. Limiti di funzioni.
- Definizione di intorno. - Definizione di limite di funzione tramite il limite di successioni. - Definizione diretta di limite di funzione reale di una variabile reale mediante gli intorni.
- $(1 + 1/x)^x \to e$ se $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Non esistenza di alcuni limiti ($\sin x$, $\sin 1/x$, per $x \to +\infty$, (con dim.)).
- Limite destro e sinistro.
- Limiti di somme, prodotti e quozienti; forme indeterminate.
- Limiti di funzioni composte, cambio di variabili nei limiti.

4. Funzioni continue.
- Definizione di funzione continua. Continuità di somma, prodotto e rapporto di funzioni continue, funzioni composte.
- Continuità delle funzioni elementari (dim. nel caso $\sin x$). - Punti di discontinuità: eliminabile, di 1a e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità.
- Teorema della permanenza del segno. - Teorema degli zeri delle funzioni continue (con dim.). - Funzioni limitate, punti di massimo e minimo assoluto.
- Massimi e minimi delle funzioni continue: teorema di Weierstrass.
- Teorema dei valori intermedi: se f è continua in $[a, b]$ allora $f([a, b]) = [m, M]$, con m e M rispettivamente il minimo e il massimo di f (con dim.).
- Continuità dell inversa di una funzione continua strettamente monotona definita su un intervallo.
- Esistenza del limite di funzioni monotone.
- Limiti notevoli per $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{log(x+1)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$ $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, quando $x \to 0$ (con dim.).
Confronti di infinitesimi, simboli o, (o piccolo).

5. Derivate e calcolo differenziale.
- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale. Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico. - Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi.
- Legami tra derivabilità e continuità (con dim.). Derivate successive.
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^n, $\sin x$, e^x, $logx$).
- Regole di derivazione: somma, prodotto (con dim.) e reciproco (con dim.).
- Derivata di funzioni composte (dim. nel caso $g(x + h) \neq g(x)$, per ogni $h \neq 0$).
- Derivata della funzione inversa (con dim.).
- Massimi e minimi locali di funzioni derivabili: teorema di Fermat (con dim.).
- Teorema di Rolle (con dim.) - Teorema di Lagrange (con dim.).
- Criterio di monotonia per funzioni derivabili (con dim.), condizioni sufficienti per i massimi e minimi locali.
- Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo (con dim.).
- Funzioni convesse.
- Criterio di convessità per funzioni due volte derivabili.
- Flessi. Condizione necessaria per i flessi in punti in cui la funzione è due volte derivabile.
- Asintoti orizzontali, verticali, obliqui.
- Determinazione del grafico di una funzione. Ricerca degli zeri di funzioni derivabili attraverso lo studio della monotonia.
- Teorema di L' Hopital (con dim. nel caso $0/0$, f e g derivabili in x_0, con derivata continua e $g'(x_0) \neq 0$).
- Scala degli infiniti per le funzioni elementari (potenze, esponenziali, log..).
- Formula di Taylor col resto di Peano (dim. per n=1, n=2)
- Sviluppi asintotici delle funzioni elementari (dim. per e^x, $\sin x$).
-Uso della formula di Taylor per determinare la natura dei punti stazionari (dim. nel caso $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$). - Confronti di infinitesimi e infiniti, simboli o (o piccolo) e sue proprietà; uso degli sviluppi asintotici nel calcolo delle forme indeterminate.
- Formula di Taylor col resto di Lagrange, stima dellerrore nel calcolo delle funzioni elementari (cenni).

6. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.
- Integrale definito per funzioni limitate. Somme inferiori e somme superiori. Rettangoloide associato ad una funzione non negativa e significato geometrico dellintegrale.
- Esempio di funzione limitata ma non integrabile (dim. facoltativa).
- Additività rispetto all' intervallo di integrazione, linearità dellintegrale e confronto; integrali su intervalli orientati.
- Teorema della media per funzioni continue (con dim.).
- Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni monotone, delle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità.
- Primitive di funzioni. Caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione in un intervallo (con dim.).

- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Formula fondamentale del calcolo integrale (con dim.), calcolo di integrali definiti mediante primitive.
- Integrazione per parti (con dim.) e per sostituzione (con dim.).
- Integrazione di alcune funzioni razionali mediante rappresentazione in fratti semplici, sostituzioni notevoli per l'integrazione di alcune funzioni irrazionali. Integrazione delle funzioni razionali nelle variabili $\sin x$ e $\cos x$.
- Integrali impropri di funzioni illimitate su intervalli limitati o di funzioni continue su intervalli illimitati.
-Condizione necessaria di integrabilità su intervalli illimitati di una funzione che ammetta limite a ∞ (si veda appunti in rete).
- Integrali impropri di funzioni non negative: teoremi del confronto (dim. facoltativa) del confronto asintotico, del confronto asintotico con $1/x^p$, $x \to +\infty$ o $x \to 0$ (si veda appunti in rete) .
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ e di $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, al variare di α e β.

7. Serie numeriche

- Ridotta n-esima, somma di una serie. Serie numeriche convergenti, divergenti e indeterminate.
- La serie geometrica (dim. del suo comportamento).
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.)
- Serie a termini non negativi, esistenza del limite della ridotta n-esima (con dim.).
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi: del confronto (con dim.), del confronto asintotico, del rapporto (con dim. nel caso $l < 1$), della radice.
- La serie armonica generalizzata.
- La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, al variare di α e β.
- Serie alternate: criterio di convergenza per le serie alternate (di Leibniz).
- Convergenza assoluta e convergenza.

8. Equazioni differenziali.

- Equazioni differenziali del primo ordine in forma generale, integrale generale. Problema di Cauchy, definizione di soluzione.
- Equazioni del primo ordine lineari, struttura dell'integrale generale (con dim.), formula risolutiva (con verifica).
- Equazioni del primo ordine a variabili separabili, formula risolutiva (con dim.).
- Equazioni del primo ordine della forma $y' = f(y/x)$.
- Equazioni lineari del secondo ordine, struttura dellintegrale generale, soluzioni indipendenti, combinazione lineare di due soluzioni.
- Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti, formule risolutive mediante le radici dellequazione caratteristica associata.
- Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti, ricerca della soluzione particolare quando il termine noto è un polinomio oppure è della forma $e^{ax} \cos bx$, o $e^{ax} \sin bx$ o una loro combinazione lineare.

Testo consigliato

P. Marcellini, C. Sbordone: Elementi di Analisi Matematica uno, Liguori Editore.
Le equazioni differenziali sono contenute nel Volume 2: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: Elementi di Analisi Matematica due, Liguori Editore.
Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione.
Tra i vari testi di esercizi si segnalano i testi di
Marcellini e Sbordone Esercitazioni di matematica (ed. Liguori),
S. Salsa, A. Squellati Esercizi di matematica (ed. Zanichelli)
G. De Marco e C. Mariconda Esercizi di calcolo in una variabile (ed. Decibel-Zanichelli),
O. Stefani, A. Zanardo " Complessi e Polinomi", Dispensa.
O. Stefani, A. Zanardo " Disequazioni", Cortina.
L orario di ricevimento del docente si svolge il giovedì dalle 14.15 in aula B3 (Complesso Barche). Tale orario resta in vigore fino alla fine del corso, salvo diverso avviso.

Nel periodo degli esami la docente fisserà un ricevimento settimanale. Il ricevimento studenti, dopo i primi due appelli, si svolgerà su appuntamento
(mannucci@math.unipd.it).

Le docenti Francesca Albertini e Paola Mannucci