ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 16 settembre 2014

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\sin(2x) + \frac{1}{2}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

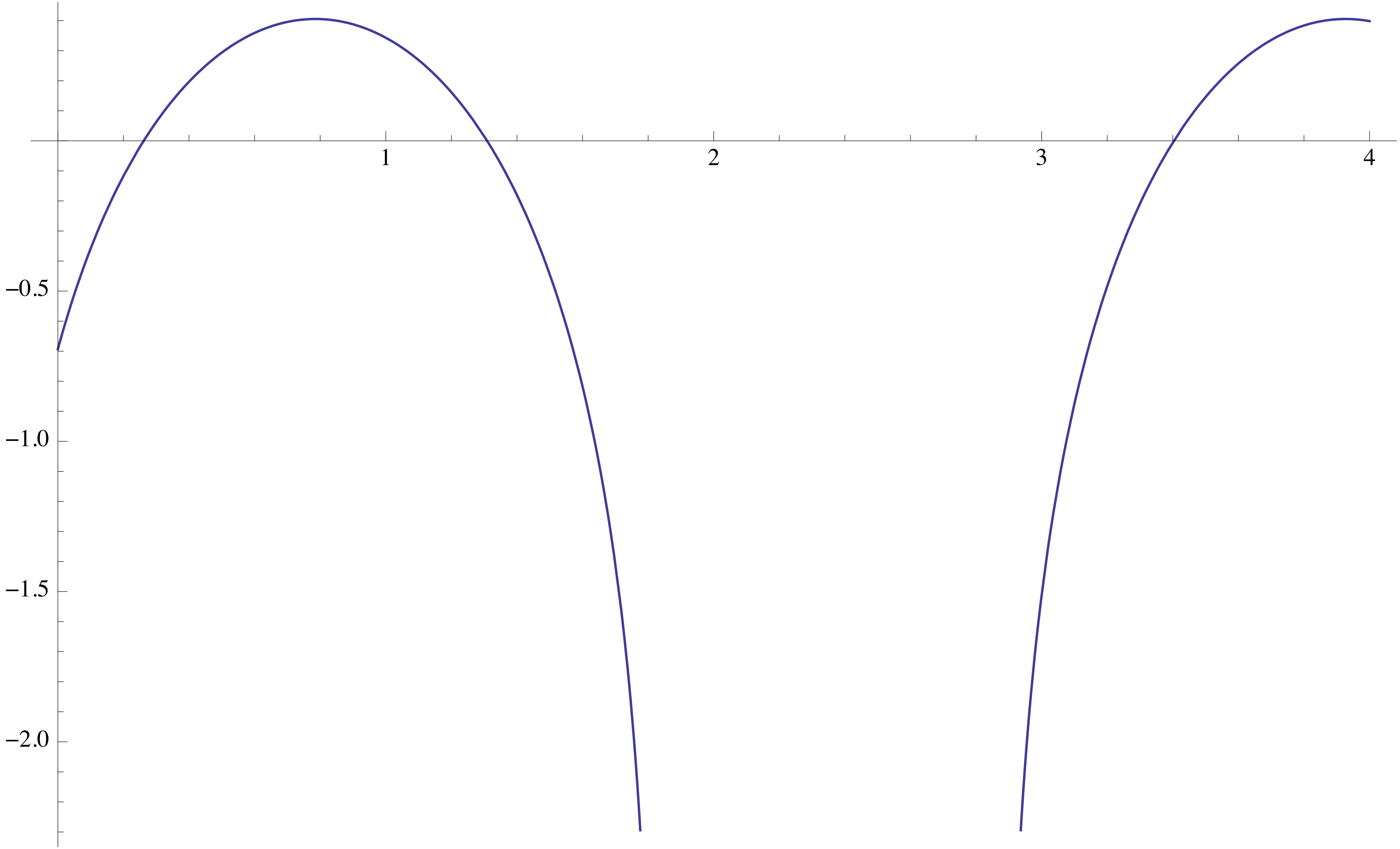
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento:
a) La funzione è periodica di periodo π infatti $f(x+\pi) = f(x)$, quindi la studieremo in $[0,\pi]$.
Dominio: dobbiamo risolvere la disequazione $\sin(2x) + 1/2 > 0$ che, in $[0,\pi]$, ha come soluzioni $[0, \frac{7}{12}\pi) \cup (\frac{11}{12}\pi, \pi]$ e in tutto $\mathbb{R}$ il dominio è $[k\pi, \frac{7}{12}\pi + k\pi) \cup (\frac{11}{12}\pi + k\pi, \frac{7}{12}\pi + k\pi]$.
Da ora in poi studieremo la funzione in $D = [0, \frac{7}{12}\pi) \cup (\frac{11}{12}\pi, \pi]$ e poi la estenderemo tenendo conto della periodicità.
Segno: $f(x) > 0$ se $\sin(2x) + 1/2 > 1$, quindi $\sin(2x) > 1/2$. Risolto in D si ottiene $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi]$.
b)i limiti significativi sono $\lim_{x\to(\frac{7\pi}{12})} = -\infty$, $\lim_{x\to(\frac{11\pi}{12})} = -\infty$.
Inoltre $f(0) = f(\pi) = -\log 2 < 0$.
c) La funzione dove è definita è continua e derivabile.
$f'(x) = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)+1/2}$, che si annulla in D solo se $x = \pi/4$ (notare che $\frac{3}{4}\pi$ non appartiene al dominio).
Quindi per i punti di D si ha che f è crescente in $(0, \pi/4)$ decrescente in $(\pi/4, \frac{7}{12}\pi)$ e crescente in $(\frac{11}{12}\pi, \pi)$. Quindi $x = \pi/4$ è un punto di massimo relativo e dal segno della funzione si deduce che è anche un punto di massimo assoluto con $f(\pi/4) = \log(3/2)$.
Non ci sono limiti di f' significativi perché in $x = 0$ e in $x = \pi$ la funzione è derivabile e si attacca attraverso la sua periodicità.
Facoltativo: $f''(x) = -\frac{4\cos^2(2x)}{(\sin(2x)+1/2)^2} - \frac{4\sin(2x)}{\sin(2x)+1/2} = -\frac{4}{(\sin(2x)+1/2)^2}(1 + \frac{1}{2}\sin(2x))$ da cui si osserva che $f''(x) < 0$ nel suo dominio, cioè la f è sempre concava.



1
2
3
4
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n = n^\alpha (3\sin(1/n^2) - \log(1+3/n^2))$$

(a) Discutere per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione tende a zero.
(b) Discutere per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$.

Svolgimento: (cenno)

Poichè per $x \to 0$ vale:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin(x) = x + o(x^2),$$

possiamo riscrivere la successione come:

$$a_n = n^\alpha \left(3\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^4}) - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{2n^4} + o(\frac{1}{n^4})) \right),$$

$$a_n = \frac{9}{2n^{4-\alpha}} + o(\frac{1}{n^{4-\alpha}}).$$

(a)

Utilizzando lo sviluppo precedente abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2n^{4-\alpha}} + o(\frac{1}{n^{4-\alpha}}) = \begin{cases} 0 & \alpha < 4 \\ \frac{9}{2} & \alpha = 4 \\ +\infty & \alpha > 4. \end{cases}$$

(b)

Se $\alpha \geq 4$ la serie non converge poichè non è infinitesima. Se $\alpha < 4$ la serie è asintotica alla serie armonica generalizzata con esponente $4-\alpha$ che converge se e solo se

$$4 - \alpha > 1 \quad \Rightarrow \alpha < 3.$$

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = \left(x^2+1\right) e^{2x}.$$

(a) Determinarne una primitiva
(b) Calcolare l'area della regione del piano definita da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1],\ 1 \leq y \leq f(x).\}.$$

Svolgimento: (cenno)

(a)

Per trovare una primitiva di f determiniamo $\int f(x)dx$, che si calcola utilizzando la tecnica di integrazione per parti per due passaggi.

$$\int \left(x^2+1\right) e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\int e^{2x}(2x)dx =$$

$$e^{2x}\frac{x^2+1}{2}-\int xe^{2x}=e^{2x}\frac{x^2+1}{2}-\left[\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right]=$$

$$e^{2x}\left[\frac{x^2+1-x}{2}+\frac{1}{4}\right]+\text{cost.}$$

$$\int\left(x^2+1\right)e^{2x}=e^{2x}\frac{2x^2-2x+3}{4}+\text{cost.}$$

(b) Si ha che $f(0)=1$ e se $x>0$ allora $x^2+1>1$ e anche $e^{2x}>1$, da cui $f(x)\geq 1$ per ogni $x\in[0,1]$. Quindi

$$\text{Area } A=\int_0^1(f(x)-1)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 1dx=e^{2x}\frac{2x^2-2x+3}{4}\bigg|_0^1-x\bigg|_0^1=$$

$$e^2\left(\frac{2-2+3}{4}\right)-\frac{3}{4}-1=\frac{3e^2-7}{4}.$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x,y)=\frac{1}{\log(\frac{y}{x})}$$

(a) Determinare il dominio di f e disegnarlo. Dire se è chiuso e limitato.

(b) Determinare, se esiste, il piano tangente al grafico di f in $(1,e,f(1,e))$, giustificando la risposta.

Svolgimento: (cenno) (a) Il dominio è
$D=\{(x,y):\ x\neq 0,\ y/x>0,\ \log(y/x)\neq 0\}=\{(x,y):(x,\,y>0 \text{ o } x,\,y<0) \text{ e } y\neq x\}$, cioè il primo ed il terzo quadrante esclusi gli assi e la prima bisettrice, $y=x$. D quindi è aperto e illimitato.

(b) $(1,e)\in D$, dove f è continua e differenziabile, perchè composizione di funzioni derivabili con derivate continue. Quindi esiste il piano tangente in $(1,e,f(1,e))$. Si ha: $f(1,e)=1/\log(e)=1$ e le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y)=-\frac{1}{\log^2(\frac{y}{x})}\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\quad\Longrightarrow\quad f_x(1,e)=1,$$

$$f_y(x,y)=-\frac{1}{\log^2(\frac{y}{x})}\frac{x}{y}\left(\frac{1}{x}\right)\quad\Longrightarrow\quad f_x(1,e)=-\frac{1}{e}.$$

Quindi l'equazione del piano tangente richiesta è

$$z=1+x-1-\frac{y-e}{e}=x-\frac{y}{e}+1.$$