

Analisi Matematica 1

Vicenza, novembre 2009.

Criterio del rapporto (per le successioni)

Teorema Sia a_n una successione a termini positivi. Se la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge ad un limite $l < 1$ allora la successione a_n è strettamente decrescente e converge a zero. Se $l > 1$ allora la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$. Se $l = 1$ non si può dire niente.

Dim. (nel caso $l < 1$)

Dalla definizione di limite, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un n_0 tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon$ per ogni $n > n_0$. Poiché $l < 1$ scelgo ϵ tale che $M := l + \epsilon < 1$. Quindi ottengo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < M < 1$ per ogni $n > n_0$, cioè che la successione è strettamente decrescente (per $n > n_0$).

Inoltre si ha che

$$0 < a_{n+1} < Ma_n < M^2 a_{n-1} < \dots < M^{n-n_0+1} a_{n_0} = M^n M^{1-n_0} a_{n_0}.$$

Poiché $M < 1$ si ha che la successione geometrica $M^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi si ha che

$$0 < a_{n+1} < M^n M^{1-n_0} a_{n_0} \rightarrow 0$$

Dal teorema dei Carabinieri segue che anche $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.