Note sulle Serie
Corso di Analisi 1

ANDREA CENTOMO

Anno accademico 2009/2010

In generale, data una serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

non è quasi mai possibile determinare una formula esplicita per la sua somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 \dots a_n$$

e quindi **non** è quasi mai possibile calcolare (se esiste) la somma serie utilizzando la definizione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

A questo discorso fanno eccezione le serie telescopiche, come ad esempio la serie di Mengoli, e l'importante serie geometrica di ragione r

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k.$$

Per studiare il carattere di una serie per la quale non è possibile determinare una formula esplicita della somma parziale n-esima si ricorre per lo più a criteri. Durante il corso ci siamo soffermati principalmente sui criteri relativi a due tipologie di serie

A) le serie a termini non negativi

B) le serie a termini di segno alterno

e quindi quando si risolvono gli esercizi è utile controllare subito se la serie di cui è richiesto lo studio appartiene o meno a queste tipologie. Metodologicamente possiamo dire che

a) è sempre utile controllare se è verificata la condizione necessaria di convergenza, che per la serie (1), è

$$\lim_{x\to+\infty} a_k = 0.$$

Se questa condizione non è soddisfatta la serie di sicuro non converge: quindi o diverge o è irregolare.

b) Per le **serie a termini non negativi** (si ricorda che queste serie non possono essere irregolari) si ricorre ai seguenti criteri:

- → Criterio del confronto
- → Criterio del rapporto
- → Criterio della radice
- → Criterio del confronto asintotico

Quale criterio usare per la soluzione di un esercizio viene dall'esperienza!

c) Per le serie a termini di segno alterno si può procedere allo studio della **assoluta convergenza** (che implica la convergenza semplice) e dove non si ha assoluta convergenza si ricorre al Criterio di Leibniz.

Il libro di testo purtroppo non riporta i seguenti importanti risultati che non dimostriamo.

Teorema 1. **(Criterio del confronto asintotico)** *Siano date due successioni a valori positivi* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$*. Allora*

i. se $a_n \sim b_n$ *per* $n \to +\infty$ *allora*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere;

ii. se $a_n = o(b_n)$ *per* $n \to +\infty$ *allora*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty.$$

Teorema 2. *Siano data la successione a valori positivi* $\{a_n\}$*. Allora*

i. se per qualche $p > 1$ *si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} n^p a_n = L \in [0, +\infty) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

ii. se per qualche $p \leq 1$ *si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} n^p a_n = L \in (0, +\infty] \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Il Teorema 2 prende il nome piuttosto significativo di Criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata.

1 Esercizi svolti

Esercizio 1. La rappresentazione decimale di un numero reale $x \in [0, 1]$ è un espressione del tipo

$$x = 0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

dove $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è l'n-esima cifra decimale dopo la virgola, $n \geq 1$. Per definizione si pone

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \tag{2}$$

i. verificare che (1) converge;

ii. verificare che effettivamente $0 \leq x \leq 1$;

iii. calcolare il numero razionale $q = 0, \overline{45}$.

Soluzione. Possiamo verificare la convergenza osservando che (2) è una serie a termini positivi e

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}.$$

Osservato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 9 = 10 - 9 = 1$$

per il Criterio del confronto è chiaro che (2) è sempre convergente. La seconda verifica si lascia per esercizio. Infine

$$q = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{45}{100^n} = 45 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{100^n} - 45 = \frac{45 \cdot 100}{99} - 45 = \frac{45}{99}.$$

Esercizio 2. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$$

Soluzione. La serie non è definita per $x = -1$. Inoltre è banale vedere che per $x = 0$ la serie converge a 0. Iniziamo studiando la convergenza assoluta ossia studiando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n^4}{3^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}\left(\frac{|x|}{|x+1|}\right)^{n+1} \tag{3}$$

per $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Utilizziamo il Criterio del rapporto e calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}\left(\frac{|x|}{|x+1|}\right)^{n+2} \cdot \frac{3^n}{n^4}\left(\frac{|x+1|}{|x|}\right)^{n+1} = \frac{1}{3}\frac{|x|}{|x+1|} \tag{4}$$

da cui si conclude che la serie converge assolutamente (e semplicemente) se

$$\frac{1}{3}\frac{|x|}{|x+1|} < 1$$

ossia se

$$x^2 < 9(x^2 + 2x + 1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 8x^2 + 18x + 9 > 0$$

quindi se $x < -3/2 \quad \vee \quad x > -3/4$.

Per $x = -3/2 \quad \wedge \quad x = -3/4$ il limite (4) vale 1 e quindi il criterio del rapporto non è di aiuto nello studio della convergenza assoluta della serie. In corrispondenza di tali valori osserviamo tuttavia che la serie si riduce alla serie divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3n^4$$

Per $x \in [-3/2, -3/4]$ la serie è assolutamente divergente e quindi non sappiamo se è o meno semplicemente convergente. Ora, se

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

ossia se $x < -1 \quad \vee \quad x > 0$ la serie e a termini positivi. Quindi per $x \in [-3/2, -1)$ convergenza assoluta e semplice coincidono e la serie è divergente. Per $x \in (-1, -3/4]$ la serie è a termini negativi e quindi anche in questo caso diverge.

Esercizio 3. (Esame del 15 luglio 2009) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/\sqrt{n}}$$

e si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ c'è convergenza assoluta e semplice.

Soluzione. Iniziamo studiando la convergenza assoluta ossia studiando la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/\sqrt{n}}.$$

Osservato che

$$\frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{1/\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\alpha + 1/2}}$$

concludiamo che la serie è asintotica ad una seria armonica generalizzata. Quindi per il Criterio del confronto asintotico possiamo stabilire che la serie di partenza converge assolutamente e quindi anche semplicemente quando

$$\alpha + \frac{1}{2} > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Consideriamo ora il caso $0 < \alpha \leq 1/2$. Osserviamo che la serie di partenza è a termini di segno alterno e che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)e^{1/\sqrt{n}} = 0.$$

Inoltre la successione

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)e^{1/\sqrt{n}}$$

è monotona decrescente in quanto prodotto di successioni monotone descrescenti. Essendo soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz possiamo concludere che la serie converge semplicemente.

2 Esercizi

Esercizio 4. Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n^3)^2}{n^2+\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5}{n^3\log^n(x+1)} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n^2}$$

Esercizio 5. Verificare, usando la definizione di somma di una serie, che la seguente diverge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

e, ricorrendo al Criterio del confronto asintotico, utilizzare quanto trovato per studiare la convergenza della serie armonica.

Esercizio 6. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha}(\sqrt{1+n^4}-n^2) \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

Esercizio 7. Studiare la convergenza delle seguenti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}\,\text{(rapporto)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}\,\text{(radice)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Esercizio 8. Al variare di $x\in\mathbb{R}$ studiare convergenza semplice e assoluta delle seguenti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$$

Esercizio 9. Studiare la convergenza semplice di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$$

Esercizio 10. (Esame) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n+2)\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}}{|1-\alpha|}\right)^n$$

e si dica per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta e semplice.