FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Commissione V. Casarino, P. Mannucci

Ingegneria Gestionale, Meccanica Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10-02-2011

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti). Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y\right)dx + \left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ax + y^3\right)dy$$

a) determinare il dominio di ω, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la forma risulta chiusa nel suo dominio.
c) Verificare che per i valori di a trovati nel punto precedente la forma è esatta nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ e calcolarne le funzioni potenziale.
d) Per i valori di a trovati nel punto b) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t^4 + 1, -t^3)$, $t \in [0, 1]$.
e) Calcolare $\int_\varphi \omega$ dove φ è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, percorsa in senso antiorario.

Svolgimento:
a) Il dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Sia $F_1 = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y$ e $F_2 = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ax + y^3$. Vediamo per quali valori di a si ha $F_{1y} = F_{2x}$. $F_{1y} = -\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} + 1$ e $F_{2x} = -\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} + 2a$, quindi l'uguaglianza delle due espressioni vale per ogni (x, y) se e solo se $2a = 1$ cioè $a = 1/2$.
c) L'insieme A è un insieme semplicemente connesso, in cui la forma è definita ed è chiusa per $a = 1/2$, quindi per tale valore la forma è esatta in A. Per calcolare i potenziali $U(x, y)$ teniamo conto che $U_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y$ e $U_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x + y^3$. Integro la prima rispetto a x: $U(x, y) = \frac{-1}{x^2+y^2} + xy + g(y)$, con $g(y)$ funzione da determinare. Derivo questa espressione rispetto a y e uguaglio alla relazione sopra per U_y: $U_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x + g'(y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x + y^3$, dalla quale ottengo $g'(y) = y^3$ e quindi $g(y) = \frac{y^4}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Quindi le funzioni potenziali sono

$$U(x, y) = \frac{-1}{x^2 + y^2} + xy + \frac{y^4}{4} + C.$$

d) La curva si trova nel dominio A, dove la forma è esatta, quindi per calcolare l'integrale basta calcolare il valore di U agli estremi della curva, che si ottengono sostituendo rispettivamente $t = 0$ (punto iniziale) e $t = 1$(punto finale) nella parametrizzazione della curva, cioè $(1, 0)$ e $(2, -1)$. Quindi si ottiene $\int_\gamma \omega = U(2, -1) - U(1, 0) = -2 - 1/5 + 1/4 + 1 = -19/20$.
e) Poichè il punto $(0, 0)$, dentro la circonferenza, non è nel dominio della forma, la forma non è esatta nel dominio dentro la circonferenza quindi si deve usare la definizione di integrale curvilineo di seconda specie e calcolarlo esplicitamente. Parametrizziamo la curva con $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\int_\varphi \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y\right)dx + \left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x + y^3\right)dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \Big((2\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta) + (2\sin\theta + \cos\theta + (\sin\theta)^3)\cos\theta\Big)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \Big(-2\cos\theta\sin\theta - (\sin\theta)^2 + 2\sin\theta\cos\theta + (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^3\cos\theta\Big)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} 1 d\theta + 2\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^2 d\theta + \int_0^{2\pi} (\sin\theta)^3 \cos\theta d\theta.$$

Il terzo integrale vale 0 e tenendo conto che una primitiva di $(\sin\theta)^2$ è $\frac{\theta-\cos\theta\sin\theta}{2}$ si ottiene che l'integrale è $= 2\pi - 2\pi = 0$.

Esercizio 2 (7 punti) Si consideri l'equazione

$$f(x,y,z) = 2x^2y + 3y^2 + 6y^4 + 2(z-\frac{\pi}{2})^2 + \cos z = 0.$$

a) Dimostrare che tale equazione definisce implicitamente una funzione $z = h(x,y)$ in un intorno del punto $(0,0,\frac{\pi}{2})$.
b) Dimostrare poi che il punto $(0,0)$ è un punto critico per h.
c) Determinare il piano tangente e il versore normale alla superficie definita da $z = h(x,y)$ in $(0,0)$.
Svolgimento:
a) La funzione $f(x,y,z) = 2x^2y + 3y^2 + 6y^4 + 2(z-\frac{\pi}{2})^2 + \cos z = 0$ è definita in $\mathbb{R}^3$ e ivi di classe $\mathcal{C}^1$. Valgono inoltre $f(0,0,\frac{\pi}{2}) = 0$ e $f_z(x,y,z) = 4(z-\frac{\pi}{2}) - \sin z$, così che $f_z(0,0,\frac{\pi}{2}) = -1$. Il Teorema delle funzioni implicite garantisce allora l'esistenza di un intorno $\mathcal{U}$ di $(0,0)$, di un intorno $\mathcal{V}$ di $\frac{\pi}{2}$ e di un'unica funzione continua $z = h(x,y)$, con $h : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, tale che

$$\{(x,y,z) \in \mathcal{U}\times\mathcal{V} \,:\, f(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathcal{U}\times\mathcal{V} \,:\, z = h(x,y)\}\,.$$

b) Osserviamo che poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, la funzione h appartiene a $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$. Dimostriamo ora che $h_x(0,0) = 0$ e che $h_y(0,0) = 0$.

Dall'identità $f(x,y,h(x,y)) = 0$, valida per ogni $(x,y) \in \mathcal{U}$, ricaviamo le formule

$$h_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,h(x,y))}{f_z(x,y,h(x,y))}$$

e

$$h_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,h(x,y))}{f_z(x,y,h(x,y))}\,.$$

Poiché $f_x(0,0,\pi/2) = 0$ e $f_y(0,0,\pi/2) = 0$, risulta $h_x(0,0) = -\frac{f_x(0,0,\pi/2)}{f_z(0,0,\pi/2)} = 0$ e $h_y(0,0) = -\frac{f_y(0,0,\pi/2)}{f_z(0,0,\pi/2)} = 0$, così che $(0,0)$ è un punto critico.
c) Il piano tangente alla superficie definita da $z = h(x,y)$ in $(0,0)$ ha equazione

$$\langle \nabla f(0,0,\pi/2), (x-0, y-0, z-\pi/2)\rangle = 0\,.$$

Poiché $\nabla f = (4xy, 2x^2 + 6y + 24y^3, 4(z-\pi/2) - \sin z)$, svolgendo i conti, si ottiene

$$\langle \nabla f(0,0,\pi/2), (x-0, y-0, z-\pi/2)\rangle = 0 = \langle (0,0,-1), (x,y,z-\pi/2)\rangle = -(z-\pi/2) = 0\,,$$

cioè il piano tangente ha equazione $z = \pi/2$. Il versore normale, di conseguenza, è $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.

Esercizio 3 (8 punti) Si consideri il solido Ω intersezione dei due solidi S e C: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x+2\}$. Si calcoli

$$\int\int\int_\Omega 2z\,dxdydz.$$

Facoltativo: Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (zy^2, yz, y^2)$ uscente da Ω.

Svolgimento: Il dominio Ω si può scrivere in forma di dominio normale rispetto all'asse z così:

$$\Omega = \{0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq -x+2, 0 \leq x \leq 2\}$$

quindi l'integrale diventa

$$I = 2\int_0^2 \int_0^{-x+2} (\int_0^{4-x^2-y^2} zdz)dxdy =$$

$$2\int_0^2\int_0^{-x+2}\frac{4-x^2-y^2}{2}dxdy=\int_0^2\left(4(2-x)-x^2(2-x)-\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=$$

... integrazione di potenze di x

$$=\frac{16}{3}.$$

Esercizio 4 (8 punti) Data l'equazione differenziale

$$y'(x)=\frac{x}{(4-x^2)(y-4)}\,,$$

a) determinare l'integrale generale;
b) calcolare la soluzione che soddisfa il dato iniziale $y(0)=2$.

Svolgimento: L'equazione è a variabili separabili. Osserviamo anche che devono essere verificate le condizioni $x\neq\pm2$ e $y(x)\neq4$ per ogni $x\in\operatorname{dom}y$. Non esistono, inoltre, soluzioni costanti.
a) Separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\int(y-4)\,dy=\int\frac{x}{4-x^2}dx\,,$$

da cui

$$\frac{y^2}{2}-4y=-\frac{1}{2}\log|4-x^2|+C\,,\ \ C\in\mathbb{R}\,.$$

Per esplicitare la soluzione, risolviamo l'equazione

$$y^2-8y+\log|4-x^2|-2C=0\,,$$

ottenendo

$$y(x)=4\pm\sqrt{16-\log|4-x^2|+2C}\,,$$

che rappresenta l'integrale generale dell'equazione assegnata.
b) Poiché la soluzione richiesta deve soddisfare il dato iniziale $y(0)=2$ e anche la condizione $y(x)\neq4$, si cerca una soluzione tale che $y(x)<4$ e quindi dobbiamo imporre il dato iniziale a una soluzione della forma

$$y(x)=4-\sqrt{16-\log|4-x^2|+2C}\,,$$

ottenendo

$$2=4-\sqrt{16-\log4+2C}\,,$$

da cui $C=\log2-6$. La soluzione richiesta è quindi

$$y(x)=4-\sqrt{4+2\log2-\log|4-x^2|}\,.$$