**Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria**
Laurea in Ingegneria Gestionale,
Doc. P. Mannucci e M. Motta

Vicenza 9/5/07

**Soluzioni degli esercizi di autoverifica. 2. Integrali doppi e tripli.**

**1.** Calcolare
$$I = \int_D \frac{x}{x^2+y^2} dx\, dy,$$
dove $D = \{(x,y) : \; x^2/2 \le y \le x^2, \; 1 < x < 2\}$.

*Sol.* Per le formule di riduzione, si ha
$$I = \int_1^2 \left( \int_{x^2/2}^{x^2} \frac{(1/x)}{1+(y/x)^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \arctan(y/x)\Big|_{x^2/2}^{x^2} dx = \int_1^2 [\arctan(x) - \arctan(x/2)]\, dx.$$
Integrando per parti,
$$\int 1 \arctan(x)\, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c,$$
$$\int 1 \arctan(x/2)\, dx = x \arctan(x/2) - \int \frac{x/2}{1+(x/2)^2}\, dx = x \arctan(x/2) - \log(1+(x/2)^2) + c,$$
quindi
$$I = \left[ x(\arctan x - \arctan(x/2)) + \log\left( \frac{1+(x/2)^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_1^2.$$

**2.** Calcolare
$$I = \int_D \frac{\tan(x+y)}{x+y} dx\, dy,$$
dove $D = \{(x,y) : \; x+y < 1, \; x, \; y > 0\}$.

*Sol.* Introduciamo il cambiamento di variabili invertibile $u = x+y$, $v = x-y$, per cui il modulo del determinante della matrice Jacobiana é
$$\left| det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 2$$
e, poiché $u+v = 2x$, $u-v = 2y$, otteniamo che l'insieme $D$ nelle coordinate $(u,v)$ diventa
$$T = \{(u,v) : \; 0 < u < 1, \; -u < v < u\}.$$
Quindi (ricordiamo che questa é $\Phi^{-1}$ rispetto al libro, per cui "$dx\, dy = \frac{1}{2} du\, dv$"..)
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_{-u}^{u} \frac{\tan(u)}{u}\, dv \right) du = \int_0^1 u \frac{\tan(u)}{u}\, du = [-\log(\cos u)]_0^1.$$

**3.** Calcolare il volume ed il baricentro del solido omogeneo (di densitá 1) dato da

$$S = \left\{(x,y,z):\ y \geq 0,\ 8(x^2+z^2) - 4y^2 \leq 1,\ x^2+z^2-y^2 \geq 0\right\}.$$

*Sol.* Poiché $S$ é un solido di rotazione attorno all' asse $y$, determiniamo la proiezione $E$ di $S$ nel piano $0,x,y$. Si ha

$$E = \left\{(x,y):\ y \geq 0,\ 8x^2-4y^2 \leq 1,\ x^2 \geq y^2\right\} = \left\{(x,y):\ \ 8x^2-4y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq |x|\right\},$$

dove l'equazione $8x^2-4y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole. Detta $E^*$ la porzione di $E$ contenuta nel primo quadrante, possiamo rappresentare $E^*$ come insieme normale rispetto ad $y$:

$$E^* = \left\{(x,y):\ y \in [0,1/2], \quad y \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}\right\}.$$

Usando il Teorema di Guldino:

$$Vol(S) = 2\pi \int_{E^*} x\,dx\,dy = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\int_y^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}} x\,dx\right) dy = \pi \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{8}(1+4y^2) - y^2\right] dy = \frac{\pi}{24}.$$

Per calcolare le coordinate del baricentro, dalla simmetria di $S$ si deduce immediatamente che $x_G = 0 = z_G$. Resta dunque da calcolare solo $y_G = \frac{1}{Vol(S)} \int_S y\,dx\,dy\,dz$. Pensando di rappresentare $S$ in coordinate cilindriche con asse $y$, cioé:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

si ha (usando la rappresentazione di $E^*$..) che il trasformato di $S$ nelle nuove coordinate é

$$T = \left\{(\rho,\theta,y):\ \theta \in [0,2\pi], \quad y \in [0,1/2], \quad y \leq \rho \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}\right\}.$$

Poiché il determinante della matrice Jacobiana é $\rho$, si ottiene

$$y_G = \frac{24}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/2} y \left(\int_y^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}} \rho\,d\rho\right) dy\right) d\theta = 24 \int_0^{1/2} \left[\frac{y}{8}(1+4y^2) - y^3\right] dy = \frac{3}{16}.$$

**4.** Calcolare

$$I = \int_Q (x-y)\log(x+y)dx\,dy,$$

dove $Q$ é il quadrilatero compreso nell' intersezione delle rette $y = x-1$, $y = x$, $y = 1-x$ e $y = 3-x$.

*Sol.* Introduciamo il cambiamento di variabili invertibile $u = x+y$, $v = x-y$, per cui il modulo del determinante della matrice Jacobiana é 2 (vedi es. 2). L'insieme $Q$ nelle coordinate $(u,v)$ diventa

$$T = \{(u,v):\ 1 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 1\}.$$

quindi

$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(\int_0^1 v\log u\,dv\right) du = \frac{1}{4}\int_1^3 \log u\,du = 3\log 3 - 2.$$

**5.** Calcolare

$$I = \int_P (3x - y)^2 \left(-\frac{x}{4} + \frac{y}{4}\right) dx\, dy,$$

dove $P$ é il parallelogramma delimitato dalle rette $y = 3x$, $y = x$, $y = 3x - 1$ e $y = x + 4$.

*Sol.* Consideriamo il cambiamento di variabili invertibile $u = y - x$, $v = 3x - y$. L'insieme $P$ diventa

$$T = \{(u, v) : \ u \in [0, 4], \quad v \in [0, 1]\},$$

il determinante della matrice Jacobiana é 2, perció

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 v^2\, dv\right) \left(\int_0^4 \frac{u}{4}\, du\right) = \frac{1}{3}.$$

**6.** Disegnare l'insieme

$$C = \left\{(x, y, z) : \ z \leq 2 - \frac{x^2 + y^2}{3}, \ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4\right\}$$

e calcolare

$$\int_C (z - 2) dx\, dy\, dz.$$

*Sol.* L'insieme $C$ é di rotazione attorno all'asse $z$. L' insieme proiezione di $C$ nel piano $O, x, z$ é

$$E = \left\{(x, z) : \ z \leq 2 - \frac{x^2}{3}, \ x^2 + (z - 2)^2 \leq 4\right\},$$

dove l' equazione $z = 2 - \frac{x^2}{3}$ rappresenta una parabola con asse $z$, di vertice $V(0, 2)$ e rivolta verso il basso, mentre $x^2 + (z - 2)^2 = 4$ rappresenta una circonferenza di centro $C(0, 2)$ e raggio 2. $E$ é dato dai punti $(x, z)$ interni alla circonferenza che stanno sotto la parabola. Detta $E^*$ la porzione di $E$ contenuta nel primo quadrante, $E^*$ risulta normale rispetto ad $x$:

$$E^* = \left\{(x, z) : \ x \in [0, \sqrt{3}], \quad 2 - \sqrt{4 - x^2} \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{3}\right\}.$$

Quindi in coordinate cilindriche con asse $z$, cioé

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \cos \theta, \\ z = z, \end{cases}$$

l' insieme $C$ diventa

$$T = \left\{(\rho, \theta, z) : \ \theta \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, \sqrt{3}], \quad 2 - \sqrt{4 - \rho^2} \leq z \leq 2 - \frac{\rho^2}{3}\right\}.$$

Poiché il determinante della matrice Jacobiana é $\rho$, si ha

$$I = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\int_{2 - \sqrt{4 - \rho^2}}^{2 - \frac{\rho^2}{3}} (z - 2)\, dz\right) d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(-4 + \rho^2 + \frac{\rho^4}{9}\right) d\rho = -\frac{13}{4}\pi.$$

**7.** Calcolare

$$I = \int_E x^2(y - x^3)e^{y+x^3} dx\, dy,$$

dove $E = \{(x, y) : \ x^3 \le y \le 3, \ x \ge 1\}$.

*Sol.* Introduciamo il cambiamento di variabili $u = y - x^3$, $v = y + x^3$. É chiaramente invertibile e la matrice Jacobiana ha determinante di modulo $6x^2$. Quindi l' insieme $E$ nelle nuove coordinate diventa $T = \{(u, v) : \ u \in [0, 2], \quad u + 2 \le v \le -u + 6\}$ e l' integrale é

$$I = \frac{1}{6} \int_0^2 u \left( \int_{u+2}^{-u+6} e^v \, dv \right) du = \frac{1}{6} \int_0^2 u \left( e^6 e^{-u} - e^2 e^u \right) du.$$

Si conclude integrando per parti che $I = \frac{e^2}{6}(e^4 - 4e^2 - 1)$.

**8.** Calcolare il volume del solido ottenuto intersecando il cilindro di equazione $x^2+y^2-2x \le 0$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

*Sol.* Non si tratta di un solido di rotazione, ma essendo coinvolti una sfera ed un cilindro con asse l'asse delle $z$, é sempre conveniente operare un cambiamento di variabili passando alle coordinate cilindriche di asse $z$. Ragionando sulla proiezione dell'insieme nel piano $O, x, y$ é facile dedurre che il solido dato, detto $S$, nelle nuove coordinate diventa:

$$T = \left\{ (\rho, \theta, z) : \ \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \rho \in [0, 2\cos\theta], \quad -\sqrt{4 - \rho^2} \le z \le \sqrt{4 - \rho^2} \right\}.$$

Allora,

$$Vol(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\cos\theta} \rho \left( \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz \right) d\rho \right) d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\cos\theta} \rho \sqrt{4 - \rho^2} \, d\rho \right) d\theta.$$

Usando la solita sostituzione $t = 4 - \rho^2$ si ottiene

$$Vol(S) = \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - (1 - \cos^2\theta)^{3/2} \right] d\theta.$$

Per simmetria, possiamo restringere l' integrale all'intervallo $[0, \pi/2]$ dove $\sin\theta \ge 0$ e quindi ci si riduce a calcolare (scrivendo $\sin^3\theta = \sin\theta(1 - \cos^2\theta)$ e ponendo $t = -\cos\theta$..)

$$Vol(S) = \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta) d\theta = \frac{32}{3} \left[ \theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$