Corso di Analisi Matematica 1

Prova di autovalutazione

A. Centomo P. Mannucci C. Marchi

Università di Padova (Sede di Vicenza) – Facoltà di Ingegneria

Anno accademico 2009/2010

Esercizio 1. (**8 punti**) Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{|x+1|}\right)$$

(Dominio, segno, eventuali simmetrie, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, continuità e derivabilità, crescenza e decrescenza, eventuali minimi e massimi relativi ed assoluti, eventuali attacchi di f', abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio di f'').

Soluzione. La funzione è definita se

$$\frac{1}{|x+1|} \leq 1$$

e quindi il suo dominio è $D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$. Essendo l'argomento dell'arcoseno strettamente positivo in D si ha che

$$f(x) > 0$$

per ogni $x \in D$. La funzione non ha simmetrie.

Alla frontiera si ha

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

La funzione è continua in D in quanto composizione di funzioni continue. Inoltre, dal calcolo dei limiti precedenti, concludiamo che f è continua in $x = -2$ da sinistra e in $x = 0$ da destra. L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale e la funzione non ha altri asintoti oltre a quello orizzontale.

La funzione è derivabile in $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e la derivata prima di f è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x+1}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2} & x > 0 \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x+1}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2} & x < -2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno della derivata I osserviamo che $f'(x) < 0$, per ogni $x \in (0, +\infty)$, e da ciò concludiamo che f è monotona strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Analogamente osserviamo che $f'(x) > 0$, per ogni $x \in (-\infty, -2)$, e da ciò concludiamo che f è monotona strettamente crescente in $(-\infty, -2)$.

Per calcolare gli attacchi calcoliamo

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

da cui concludiamo che la funzione non è derivabile (da sinistra) in $x=-2$ e non è derivabile (da destra) in $x=0$. Le rette $x=-2$ e $x=0$ sono tangenti verticali al grafico di f.

La funzione ha due punti di massimo relativo e assoluto $x_1=0$ e $x_2=-2$, con massimo relativo e assoluto pari a $f(0)=\pi/2$.

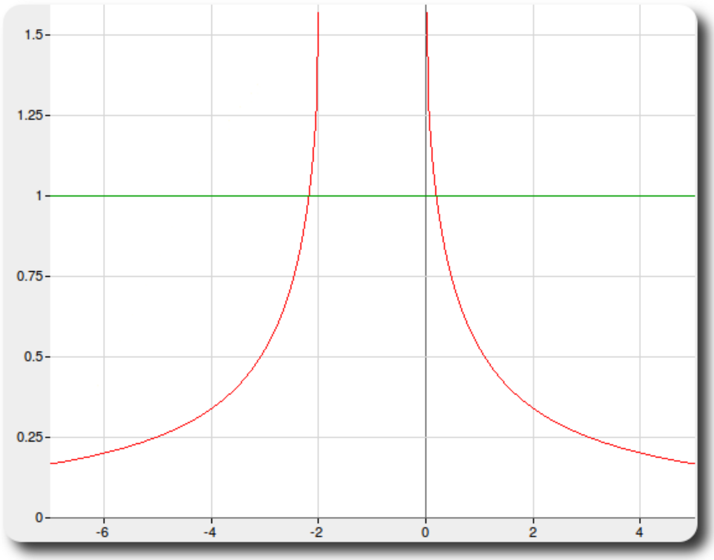

Figura 1. Grafico di f

Articolazione dei punteggi esercizio 1 (8 punti)

1. dominio, segno, simmetrie 1pt
2. limiti alla frontiera 1pt
3. continuità 1pt
4. espressione derivata completa 1pt
5. segno derivata e monotonia 1pt
6. attacchi e derivabilità nel dominio 1pt
7. punti di massimo e minimo 1pt
8. abbozzo grafico 1pt

Esercizio 2. (**7 punti**) Determinare l'insieme di concavità e convessità di

$$f(x)=\sqrt{|4e^{2x}-4|}$$

Soluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e possiamo riscriverla nella forma

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{e^{2x}-1} & x\geq 0 \\ 2\sqrt{1-e^{2x}} & x<0 \end{cases}$$

La derivata I di f è

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} & x>0 \\ \dfrac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} & x<0 \end{cases}$$

Derivando nuovamente si ha

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{+4e^{2x}\sqrt{e^{2x}-1}-2e^{2x}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}}{e^{2x}-1} & x>0\\ \dfrac{-4e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}-2e^{2x}\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}} & x<0\end{cases}$$

da cui

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2e^{2x}\,(e^{2x}-2)}{(e^{2x}-1)^{3/2}} & x>0\\ \dfrac{2e^{2x}\,(e^{2x}-2)}{(1-e^{2x})^{3/2}} & x<0\end{cases}$$

Lo studio della convessità e della concavità si riduce a risolvere la disequazione

$$e^{2x}>2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x>\frac{\log 2}{2}$$

da cui concludiamo che $f(x)$ è convessa in $(\log 2/2,+\infty)$ e concava in $(0,\log 2/2)$ e in $(-\infty,0)$.

Articolazione dei punteggi esercizio 2 (7 punti)

1. Derivata prima intera 3pt
2. Derivata seconda intera 2pt
3. Studio disequazione 1pt
4. Conclusioni concavità e convessità 1pt

Esercizio 3. (**7 punti**) Studiare la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) della seguente serie, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{n(\alpha-1)}}{2n}. \tag{1}$$

Soluzione. Iniziamo studiando la convergenza assoluta ossia studiando la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n(\alpha-1)}}{2n}. \tag{2}$$

Ricorrendo al Criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)(\alpha-1)}}{2(n+1)}\cdot\frac{2n}{e^{n(\alpha-1)}}=e^{\alpha-1}.$$

Quindi

a) se $e^{\alpha-1}<1$ ossia se $\alpha<1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente;

b) se $e^{\alpha-1}>1$ ossia se $\alpha>1$ la serie diverge assolutamente;

c) se $\alpha=1$ la serie (2) si riduce, a meno di un fattore moltiplicativo 1/2, alla serie armonica e quindi si ha divergenza assoluta.

Nel caso $\alpha=1$ la serie (1) diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$$

che per il Criterio di Leibniz converge. Infatti la successione a termini positivi di termine generico

$$a_n=\frac{1}{2n}$$

è infinitesima e strettamente decrescente.

Per concludere osserviamo che, se $x > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n(x-1)}}{2n} = +\infty$$

e quindi, per tali valori di x, la serie non converge semplicemente.

Articolazione dei punteggi esercizio 3 (7 punti)

1. convergenza assoluta
   a) criterio convergenza 3pt
   b) conclusioni $x < 1$ 1pt
   c) conclusioni $x > 1$ 1pt
2. convergenza semplice
   a) $x = 1$ 1.5pt
   b) osservazione $x > 1$ 0.5pt

Esercizio 4. (**8 punti**) Calcolare il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Soluzione. Il limite si presenta come forma indeterminata:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right]. \tag{3}$$

Per $n \to +\infty$ (quindi per $1/n \to 0^+$) si ha:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

In conclusione per il numeratore si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Il denominatore è già a posto quindi, sostituendo in (3) e semplificando, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Articolazione punteggi esercizio 4 (8 punti)

1. Numeratore
   a) sviluppo logaritmo 2pt
   b) sviluppo seno 1pt
   c) conclusioni numeratore 1pt
2. Denominatore (si lascia così) 2 pt
3. Conclusioni limite 2 pt