ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 27 gennaio 2014

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{x-2}{x+2}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (non è richiesto lo studio della derivata seconda di f).

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) (Facoltativo) Calcolare i limiti di f' se significativi .

Esercizio 2 (7 punti)

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo di $e^{x+x^2} - 1 - x - x^2 + \sin(x^2)$ per $x \to 0$.

(b) Calcolare per ogni $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - 1 - x - x^2 + \sin(x^2)}{x^2 \log(1 + x^\alpha)}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Determinare una primitiva della funzione $f(x) = (2 - x) \sinh x$.

(b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^4 |2 - x| \sinh x\, dx.$$

(c) Discutere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^4 \frac{|2 - x| \sinh x}{x^{\alpha-1}}\, dx.$$

Esercizio 4 (6 punti)

(a) Calcolare in $(1, 0)$ la derivata direzionale lungo il versore $\mathbf{v} = (1/3, -2\sqrt{2}/3)$ della funzione

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{3x + y}\right).$$

(b) (Facoltativo) Calcolare il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 27 gennaio 2014

TEMA 2

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{x-3}{3+x}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (non è richiesto lo studio della derivata seconda di f).

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) (Facoltativo) Calcolare i limiti di f' se significativi .

Esercizio 2 (7 punti)

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo di $\log(1 + x + x^2) - x - x^2 + \tan(x^2)$ per $x \to 0$.

(b) Calcolare per ogni $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x + x^2) - x - x^2 + \tan(x^2)}{x^2 \arctan(x^\alpha)}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Determinare una primitiva della funzione $f(x) = (x - 1) \sinh x$.

(b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^3 |x - 1| \sinh x\, dx.$$

(c) Discutere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^3 \frac{|x - 1| \sinh x}{x^{\alpha-1}}\, dx.$$

Esercizio 4 (6 punti)

(a) Calcolare in $(0, 1)$ la derivata direzionale lungo il versore $\mathbf{v} = (2\sqrt{2}/3, 1/3)$ della funzione

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{2x + y}\right).$$

(b) (Facoltativo) Calcolare il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 27 gennaio 2014

TEMA 3

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{3+x}{x-3}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (non è richiesto lo studio della derivata seconda di f).

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) (Facoltativo) Calcolare i limiti di f' se significativi .

Esercizio 2 (7 punti)

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo di $\sin(x+x^3) - x - x^3 + \arcsin(x^3)$ per $x \to 0$.

(b) Calcolare per ogni $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x+x^3) - x - x^3 + \arcsin(x^3)}{x^3 \arctan(x^\alpha)}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Determinare una primitiva della funzione $f(x) = (3-x)\sinh x$.

(b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^5 |3-x| \sinh x\, dx.$$

(c) Discutere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^5 \frac{|3-x| \sinh x}{x^{\alpha-2}}\, dx.$$

Esercizio 4 (6 punti)

(a) Calcolare in $(0,1)$ la derivata direzionale lungo il versore $\mathbf{v} = (2/3, -\sqrt{5}/3)$ della funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{x+4y}\right).$$

(b) (Facoltativo) Calcolare il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 27 gennaio 2014

TEMA 4

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{x+2}{x-2}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (non è richiesto lo studio della derivata seconda di f).

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) (Facoltativo) Calcolare i limiti di f' se significativi.

Esercizio 2 (7 punti)

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo di $\tan(x + x^3) - x - x^3 + \sinh(x^3)$ per $x \to 0$.

(b) Calcolare per ogni $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x + x^3) - x - x^3 + \sinh(x^3)}{x^3 \log(1 + x^\alpha)}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Determinare una primitiva della funzione $f(x) = (x - 4) \sinh x$.

(b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^6 |x - 4| \sinh x \, dx.$$

(c) Discutere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^6 \frac{|x - 4| \sinh x}{x^{\alpha-2}} \, dx.$$

Esercizio 4 (6 punti)

(a) Calcolare in $(1, 0)$ la derivata direzionale lungo il versore $\mathbf{v} = (\sqrt{5}/3, 2/3)$ della funzione

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x + 5y}\right).$$

(b) (Facoltativo) Calcolare il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 27 gennaio 2014

Cenni di svolgimento del **TEMA** 1

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{x-2}{x+2}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

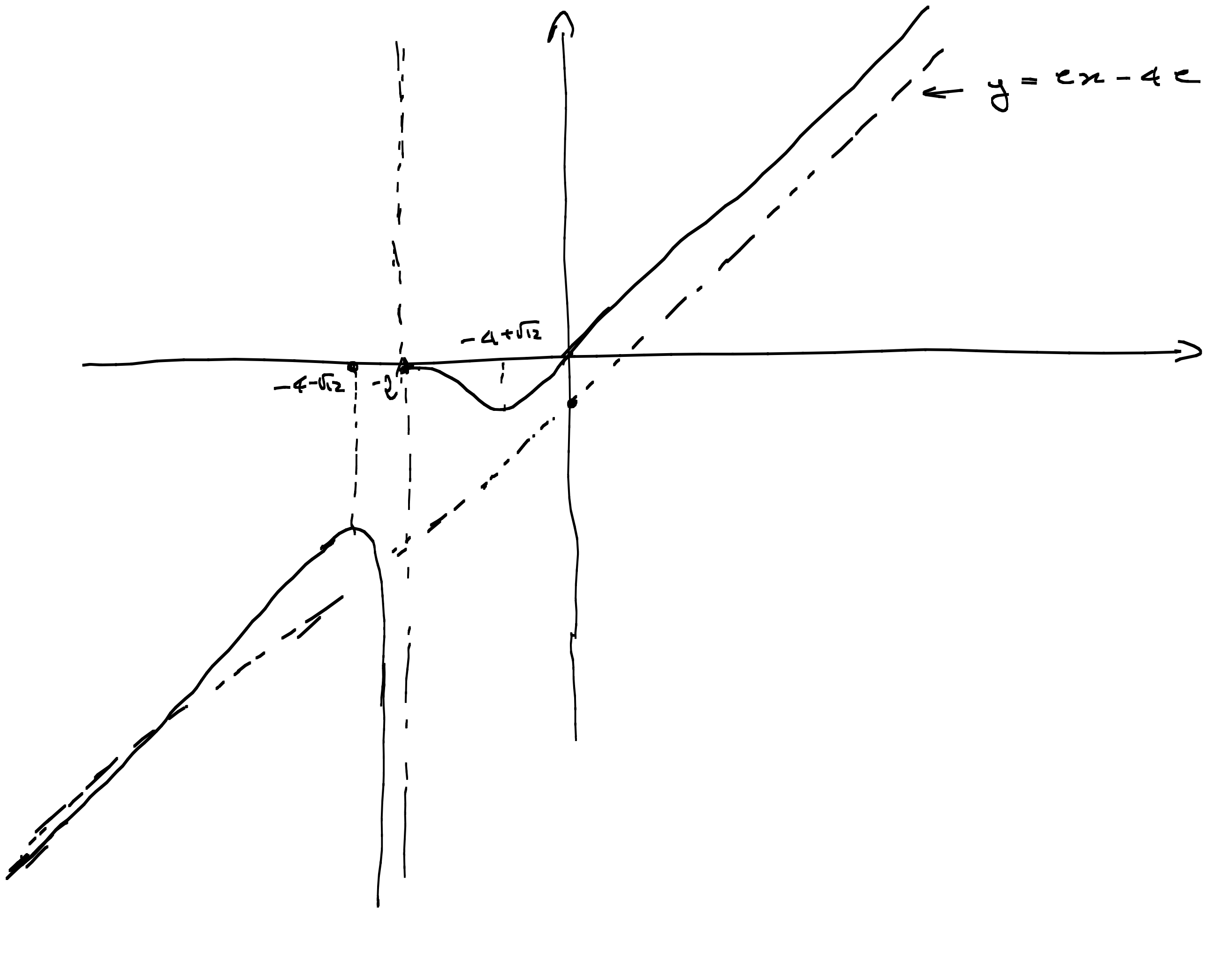
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (non è richiesto lo studio della derivata seconda di f).

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) (Facoltativo) Calcolare i limiti di f' se significativi .

Svolgimento: (cenno) a) Dominio=$\{x \in \mathbb{R}, x \neq -2\}$. Non ci sono simmetrie. $f(x) > 0$ sse $x > 0$, $f(x) = 0$ sse $x = 0$.
b) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$. La retta $x = -2$ è un asintoto verticale sinistro.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = e$,
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ex = \lim_{x\to+\infty} xe(e^{\frac{x-2}{x+2}-1} - 1) = \lim_{x\to+\infty} xe(e^{\frac{-4}{x+2}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} xe(\frac{-4}{x+2}) = -4e$.
L'ultimo passaggio è motivato dal fatto che $e^{\frac{-4}{x+2}} - 1 \sim \frac{-4}{x+2}$ per $x \to +\infty$.
Quindi per $x \to +\infty$ la $f(x)$ ha l'asintoto obliquo $y = ex - 4e$.
Analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e procedendo come sopra si ottiene che $y = ex-4e$ è asintoto obliquo per la $f(x)$ anche quando $x \to -\infty$.
c) $f'(x) = e^{\frac{x-2}{x+2}}(1 + x\frac{4}{(x+2)^2}) = e^{\frac{x-2}{x+2}} \frac{x^2+8x+4}{(x+2)^2}$. $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 + 8x + 4 > 0$ e risolvendo la disequazione si ottiene, $f'(x) > 0$ sse $x > -4 + \sqrt{12}$ o $x < -4 - \sqrt{12}$. Quindi si ottiene che la $f(x)$ è crescente per $x < -4 - \sqrt{12}$, ha un punto di massimo relativo in $x = -4 - \sqrt{12}$ e poi è decrescente tra $x = -4\sqrt{12}$ e $x = -2$. Tra $x = -2$ e $x = -4 + \sqrt{12}$ decresce, ha in $x = -4 + \sqrt{12}$ un punto di minimo relativo e per $x > -4 +$
$sqrt12$ è strettamente crescente.
e) Ha senso studiare $\lim_{x\to-2^+} f'(x)$. Per $x \to -2^+$, raccogliendo "e" come sopra, si può dire che $f'(x) \sim e\, e^{\frac{-4}{x+2}} \frac{-8}{(x+2)^2}$. Con la sostituzione $y = \frac{1}{x+2}$ $(y \to +\infty)$ si ottiene $f'(y) \sim e\, e^{-4y}(-8y^2) = -\frac{8e\, y^2}{e^{4y}} \to 0$ se $y \to +\infty$, quindi $\lim_{x\to-2^+} f'(x) = 0$ e il grafico di f si attacca a $x = -2^+$ con tangente orizzontale.



$y = ex - 4e$
$-4+\sqrt{12}$
$-4-\sqrt{12}$
-2

Esercizio 2 (7 punti)

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo di $e^{x+x^2}-1-x-x^2+\sin(x^2)$ per $x\to 0$.

(b) Calcolare per ogni $\alpha>0$, $\alpha=0$ e $\alpha<0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x+x^2}-1-x-x^2+\sin(x^2)}{x^2\log(1+x^\alpha)}.$$

Svolgimento: (cenno)

a) $e^{x+x^2}-1-x-x^2+\sin(x^2)=1+(x+x^2)+\frac{1}{2}(x+x^2)^2-1-x-x^2+x^2+o(x^2)=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$ per $x\to 0$ quindi la funzione è infinitesima di ordine 2 per $x\to 0$.

b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x+x^2}-1-x-x^2+\sin(x^2)}{x^2\log(1+x^\alpha)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2\log(1+x^\alpha)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3/2+o(1)}{\log(1+x^\alpha)}$.

Se $\alpha>0$, $x^\alpha\to 0^+$ se $x\to 0^+$, quindi $\log(1+x^\alpha)=x^\alpha+o(x^\alpha)$ e il limite $\lim_{x\to 0^+}\frac{3/2+o(1)}{\log(1+x^\alpha)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3/2+o(1)}{x^\alpha+o(x^\alpha)}=+\infty$.

Se $\alpha=0$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{3/2+o(1)}{\log(1+x^\alpha)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3/2+o(1)}{\log(2)}=\frac{3}{2\log 2}$.

Se $\alpha<0$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{3/2+o(1)}{\log(1+x^\alpha)}=0$, perchè il denominatore tende a $+\infty$.

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Determinare una primitiva della funzione $f(x)=(2-x)\sinh x$.

(b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^4 |2-x|\sinh x\,dx.$$

(c) Discutere per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^4\frac{|2-x|\sinh x}{x^{\alpha-1}}\,dx.$$

Svolgimento: (cenno) a) Integrando per parti

$\int(2-x)\sinh x dx=(2-x)\cosh x+\int\cosh x dx=(2-x)\cosh x+\sinh x+C$.

b) $\int_0^4|2-x|\sinh x\,dx=\int_0^2(2-x)\sinh x\,dx+\int_2^4(x-2)\sinh x\,dx=[(2-x)\cosh x+\sinh x]_0^2-[(2-x)\cosh x+\sinh x]_2^4=2\sinh 2-2+2\cosh 4-\sinh 4$.

c) L'integrale è da considerarsi in senso generalizzato perché la funzione integranda è illimitata in $x=0$ se $\alpha-1>0$. Quindi se $\alpha-1\le 0$ l'integrale è un integrale definito e quindi converge. Se $\alpha-1>0$, $f(x)=\frac{|2-x|\sinh x}{x^{\alpha-1}}\sim\frac{2x}{x^{\alpha-1}}=\frac{2}{x^{\alpha-2}}$ per $x\to 0$ quindi dal principio del confronto asintotico, converge tra $(0,4)$ se e solo se $\alpha-2<1$ cioè $\alpha<3$.

Esercizio 4 (6 punti)

(a) Calcolare in $(1,0)$ la derivata direzionale lungo il versore $\mathbf{v}=(1/3,-2\sqrt{2}/3)$ della funzione

$$f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{3x+y}\right).$$

(b) (Facoltativo) Calcolare il $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

Svolgimento: (cenno) (NB: il punto $(1,0)$ è interno al dominio di f: nel dominio deve essere $y\neq -3x$ e $(1,0)$ verifica $y>-3x$, per cui è in un aperto contenuto nel dominio).

(a) Le derivate parziali di f nel suo dominio esistono e sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{3x+y}\right)^2}\,\frac{3y}{(3x+y)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{3x+y}\right)^2}\,\frac{3x}{(3x+y)^2}.$$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1/3$ e poichè le derivate parziali sono funzioni continue in un intorno di $(1,0)$, f è differenziabile in tal punto e vale la Formula del Gradiente per il calcolo della derivata direzionale:

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\,v_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

(b) Per es, in coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} = \arctan\left(\frac{\rho\sin\theta}{3\rho\cos\theta + \rho\sin\theta}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{3\cos\theta + \sin\theta}\right),$$

che dipende da θ, per cui il limite non esiste. Analogamente, lungo le rette $y = mx$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} = \arctan\left(\frac{mx}{3x+mx}\right) = \arctan\left(\frac{m}{3+m}\right),$$

che dipende da m, per cui ancora risulta dimostrato che il limite non esiste. Nel caso particolare poi del limite lungo gli assi:

$$\lim_{(x\to 0)} f(x,0) = 0, \qquad \lim_{(y\to 0)} f(0,y) = \arctan 1.$$