ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 febbraio 2014

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{3-x}{x+2}\right) - 2|x|$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f;

(e) (Facoltativo) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento: (cenno) a) Dominio$=\{x \in \mathbb{R}, x \neq -2\}$. Non ci sono simmetrie.

b) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\pi - 4$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \pi - 4$. La funzione non può essere prolungata per continuità in $x = -2$, dove c'è un salto.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\arctan\left(\frac{3-x}{x+2}\right) - 2x = -\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) + 2x = \lim_{x\to+\infty} 2\arctan\left(\frac{3-x}{x+2}\right) = -\pi/2$.

Quindi per $x \to +\infty$ la $f(x)$ ha l'asintoto obliquo $y = -2x - \pi/2$.

Analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e procedendo come sopra si ottiene che $y = 2x - \pi/2$ è asintoto obliquo per $f(x)$ quando $x \to -\infty$.

c) Se $x > 0$, si ha $f'(x) = 2\left(\frac{-5}{(x+2)^2+(3-x)^2} - 1\right)$, che é strettamente negativa per ogni $x > 0$.

Se $x < 0$, $x \neq -2$, si ha $f'(x) = 2\left(\frac{-5}{(x+2)^2+(3-x)^2} + 1\right) = 2\frac{2x^2-2x+8}{(x+2)^2+(3-x)^2}$ che è sempre strettamente positiva.

Si ha: $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 16/13$ e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -36/13$

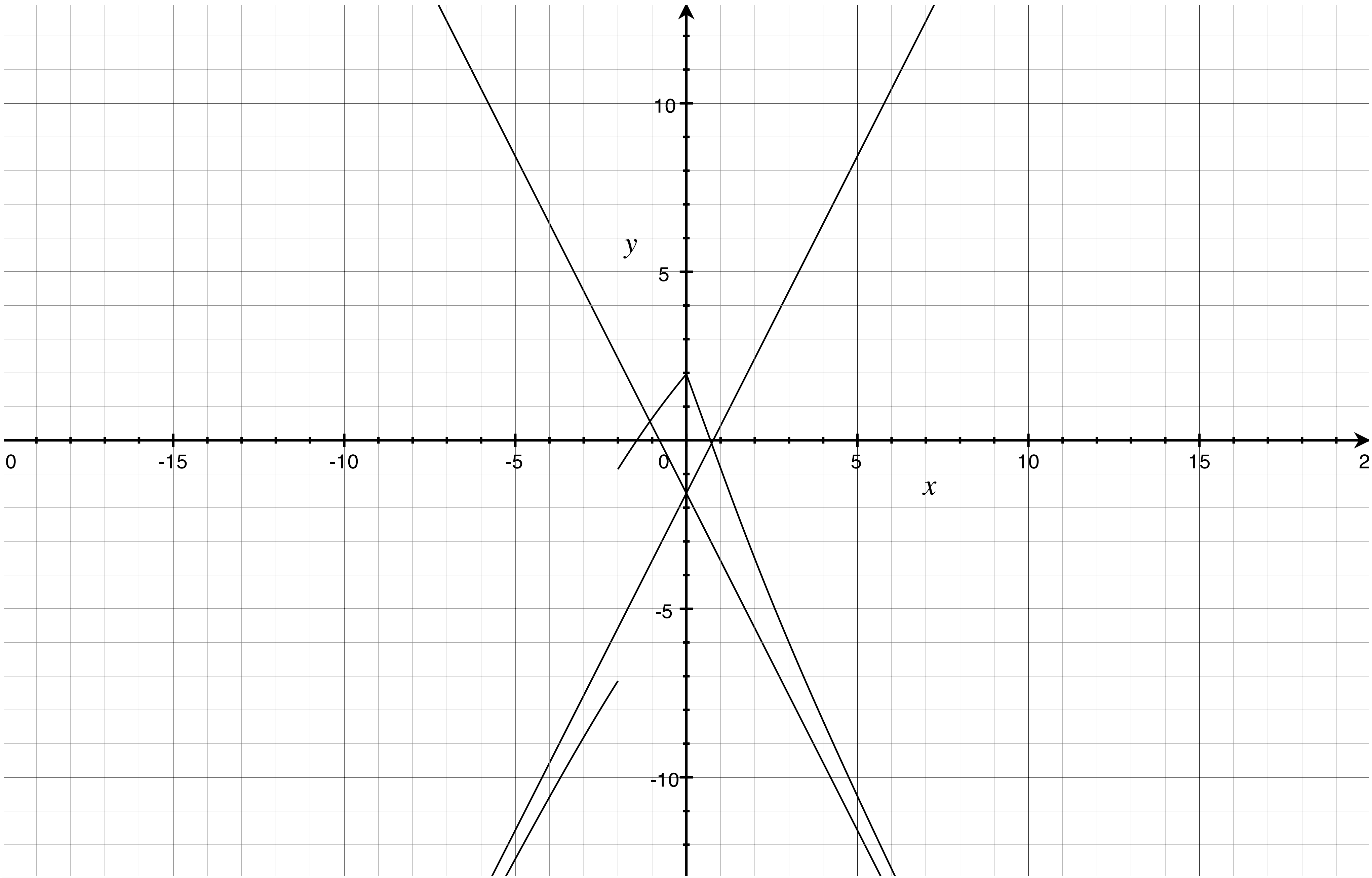
Quindi $x = 0$ è un punto angoloso per f.

La funzione $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0)$, ha un punto di massimo relativo in $x = 0$ e poi è decrescente in $(0, +\infty)$. La funzione non presenta minimo assoluto, mentre $x = 0$ è anche massimo assoluto.

Ha senso calcolare $\lim_{x\to-2^+} f'(x) = \lim_{x\to-2^-} f'(x) = 8/5$.

d) Per il grafico si veda il disegno.

e) (Facoltativo) Si calcola facilmente che per $x \neq 0$ e $x \neq -2$, si ha $f"(x) = 10\frac{4x-2}{[(x+2)^2+(3-x)^2]^2}$, che risulta positiva quando $x > 1/2$, quindi la funzione é concava negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, e $(0, 1/2)$, presenta un punto di flesso in $x = 1/2$ ed é convessa in $(1/2, +\infty)$.



y
x
10
5
-5
-10
-15
0
15

Esercizio 2 Studiare, al variare del parametro $a \geq 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + \log(n^3) + n\,a^n}{3^n + \cos n + 2}.$$

Svolgimento: (cenno) Se $a > 2$ il numeratore del termine della serie è asintotico a na^n, se $a = 2$ il numeratore del termine della serie è asintotico a $(1+n)2^n$. Se $a < 2$ (anche se $a < 1$!) il numeratore è asintotico a 2^n. Il denominatore è asintotico a 3^n, quindi si ha che
i) se $a > 2$ il termine della serie è asintotico a $\frac{na^n}{3^n}$ e la serie corrispondente converge (usando il criterio della radice o del rapporto) se e solo se $a < 3$ (se $a = 3$ il termine della serie tende a $+\infty$ e quindi la serie non converge).
ii) se $a = 2$ il termine della serie è asintotico a $\frac{(1+n)2^n}{3^n}$ e la serie corrispondente converge (usando il criterio della radice o del rapporto).
iii) se $a < 2$ il termine della serie è asintotico a $\frac{2^n}{3^n}$ e la serie corrispondente converge perché è una serie geometrica con ragione $q < 1$.
Quindi la serie converge per ogni $0 \leq a < 3$.

Esercizio 3
(a) Calcolare

$$\int_0^{1/2} e^{\arcsin(2x)}\,dx$$

(Suggerimento: utilizzare la sostituzione $t = \arcsin(2x)$...).
(b) Facoltativo: Calcolare l'area della regione $A = \{(x,y) : x \in [0,1/2], \quad -x \leq y \leq e^{\arcsin(2x)}\}$.
Svolgimento: (cenno) a) con la sostituzione $t = \arcsin(2x)$, poiché $2x = \sin t$, $2dx = \cos t\,dt$, integrando due volte per parti si ottiene:

$$\int_0^{1/2} e^{\arcsin(2x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^t \cos t\,dt = \frac{1}{2}(e^t\cos t|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^t \sin t\,dt) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^t\cos t|_0^{\pi/2} + e^t \sin t|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^t\cos t\,dt).$$

Quindi si ottiene a destra lo stesso integrale (in t) che abbiamo a sinistra e quindi

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\int_0^{\pi/2} e^t\cos t\,dt = \frac{1}{2}(e^t\cos t + e^t\sin t)|_0^{\pi/2}$$

da cui

$$\int_0^{\pi/2} e^t \cos t\,dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1).$$

Quindi

$$\int_0^{1/2} e^{\arcsin(2x)}\,dx = \frac{1}{4}(e^{\pi/2}-1).$$

b) (Facoltativo) L'area di A è

$$\int_0^{1/2}(e^{\arcsin(2x)}+x)dx = \int_0^{1/2} e^{\arcsin(2x)}dx + \int_0^{1/2} xdx = \frac{1}{4}(e^{\pi/2}-1) + \frac{x^2}{2}|_0^{1/2} = \frac{1}{4}(e^{\pi/2}-1)+\frac{1}{8}.$$

Esercizio 4 (a) Calcolare per ogni valore del parametro $a > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(\sqrt{x}) + x}{x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) + a\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}.$$

(b) Determinare $a > 0$ per cui la funzione seguente risulta prolungabile per continuità in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{3}{1-\cos x}} & x < 0 \\ \frac{e^{x^2} - \cos(\sqrt{x}) + x}{x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) + a\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} & x > 0 \end{cases}$$

Svolgimento: (cenno) a) usando gli sviluppi di McLaurin il numeratore del limite è

$$e^{x^2} - \cos(\sqrt{x}) + x = 1 + x^2 - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4!}x^2 + x + o(x^2) = \frac{3}{2}x + o(x).$$

Il denominatore è

$$x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) + a\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) + a\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + o(\sqrt{x})\right) = \frac{a}{2}x + o(x).$$

quindi il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x + o(x)}{\frac{a}{2}x + o(x)} = \frac{3}{a}.$$

b) Calcoliamo il limite per $x \to 0^-$ della $f(x)$ e poi lo imponiamo uguale al limite per $x \to 0^+$ della $f(x)$ che è proprio $\frac{3}{a}$.
Per $x \to 0^-$ dobbiamo considerare la $f(x)$ definita per $x < 0$, quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^-} (1+x^2)^{\frac{3}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{3\log(1+x^2)}{1-\cos x}}.$$

Calcoliamo il limite (con McLaurin) dell'esponente (si può fare anche con L'Hopital) :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3\log(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2/2}x^2 = 6.$$

quindi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^6$

Quindi $f(x)$ è prolungabile per continuità in $x = 0$ se e solo se $\frac{3}{a} = e^6$ cioè $a = 3e^{-6}$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 febbraio 2014

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{x-3}{x+2}\right) + 2|x|$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f;

(e) (Facoltativo) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Esercizio 2 Studiare, al variare del parametro $b \geq 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + \log(n^2) + n\, b^n}{5^n + \sin n + 3}.$$

Esercizio 3
(a) Calcolare

$$\int_0^{1/2} e^{\arccos(2x)}\, dx$$

(Suggerimento: utilizzare la sostituzione $t = \arccos(2x)$...).
(b) Facoltativo: Calcolare l'area della regione $A = \{(x,y) : x \in [0, 1/2], \quad -x \leq y \leq e^{\arccos(2x)}\}$.

Esercizio 4 (a) Calcolare per ogni valore del parametro $a > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3ax\tan x + x^3 \sin\left(\frac{1}{3x}\right)}{\cosh x - e^{x^4} + x^2}.$$

(b) Determinare $a > 0$ per cui la funzione seguente risulta prolungabile per continuità in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{3(1-e^{-x})}} & x < 0 \\ \frac{3ax\tan x + x^3\sin\left(\frac{1}{3x}\right)}{\cosh x - e^{x^4} + x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 febbraio 2014

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{x+3}{2-x}\right) - 2|x|$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f;

(e) (Facoltativo) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Esercizio 2 Studiare, al variare del parametro $a \geq 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n + \cos n + 7}{n^2 a^n + n^2 + 2^n}.$$

Esercizio 3

(a) Calcolare

$$\int_0^1 e^{3\arcsin x}\, dx$$

(Suggerimento: utilizzare la sostituzione $t = \arcsin x$...).

(b) Facoltativo: Calcolare l'area della regione $A = \{(x,y) :\ x \in [0,1], \quad -x \leq y \leq e^{3\arcsin x}\}$.

Esercizio 4 (a) Calcolare per ogni valore del parametro $a > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 5ax}{2\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + e^{2x^2} - \cos(\sqrt{x})}.$$

(b) Determinare $a > 0$ per cui la funzione seguente risulta prolungabile per continuità in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{2}{1-e^x}} & x < 0 \\ \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 5ax}{2\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + e^{2x^2} - \cos(\sqrt{x})} & x > 0 \end{cases}$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 febbraio 2014

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{x+3}{x-2}\right) + 2|x|$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f;

(e) (Facoltativo) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Esercizio 2 Studiare, al variare del parametro $b \geq 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n + \sin n + 2}{3^n + n^3 + n^2\, b^n}.$$

Esercizio 3

(a) Calcolare

$$\int_0^1 e^{2\arccos x}\, dx.$$

(Suggerimento: utilizzare la sostituzione $t = \arccos x$...).

(b) Facoltativo: Calcolare l'area della regione $A = \{(x, y) : x \in [0, 1], \quad -x \leq y \leq e^{2\arccos x}\}$.

Esercizio 4 (a) Calcolare per ogni valore del parametro $a > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sinh x - \cos x + e^{-x^4}}{5ax \arcsin x + x^3 \sin\left(\frac{5}{x}\right)}.$$

(b) Determinare $a > 0$ per cui la funzione seguente risulta prolungabile per continuità in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{2}{\cosh x - 1}}, & x < 0 \\ \frac{2x\sinh x - \cos x + e^{-x^4}}{5ax\arcsin x + x^3\sin\left(\frac{5}{x}\right)}, & x > 0 \end{cases}$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.