

Soluzioni degli esercizi su integrali doppi e tripli.

1. Calcolare

$$I = \int_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) : x^2/2 \leq y \leq x^2, 1 < x < 2\}$.

Sol. Per le formule di riduzione, si ha

$$I = \int_1^2 \left(\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{(1/x)}{1 + (y/x)^2} dy \right) dx = \int_1^2 \arctan(y/x) \Big|_{x^2/2}^{x^2} dx = \int_1^2 [\arctan(x) - \arctan(x/2)] dx.$$

Integrando per parti,

$$\int 1 \arctan(x) dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c,$$

$$\int 1 \arctan(x/2) dx = x \arctan(x/2) - \int \frac{x/2}{1 + (x/2)^2} dx = x \arctan(x/2) - \log(1 + (x/2)^2) + c,$$

quindi

$$I = \left[x(\arctan x - \arctan(x/2)) + \log \left(\frac{1 + (x/2)^2}{\sqrt{1 + x^2}} \right) \right]_1^2.$$

2. Calcolare

$$I = \int_D \frac{\tan(x + y)}{x + y} dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) : x + y < 1, x, y > 0\}$.

Sol. Introduciamo il cambiamento di variabili invertibile $u = x + y$, $v = x - y$, per cui il modulo del determinante della matrice Jacobiana é

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 2$$

e, poiché $u + v = 2x$, $u - v = 2y$, otteniamo che l'insieme D nelle coordinate (u, v) diventa

$$T = \{(u, v) : 0 < u < 1, -u < v < u\}.$$

Quindi (ricordiamo che questa é Φ^{-1} rispetto al libro, per cui " $dx dy = \frac{1}{2} du dv$ " ..)

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^u \frac{\tan(u)}{u} dv \right) du = \int_0^1 u \frac{\tan(u)}{u} du = [-\log(\cos u)]_0^1.$$

3. Calcolare

$$I = \int_Q (x - y) \log(x + y) dx dy,$$

dove Q é il quadrilatero compreso nell' intersezione delle rette $y = x - 1$, $y = x$, $y = 1 - x$ e $y = 3 - x$.

Sol. Introduciamo il cambiamento di variabili invertibile $u = x + y$, $v = x - y$, per cui il modulo del determinante della matrice Jacobiana é 2 (vedi es. 2). L'insieme Q nelle coordinate (u, v) diventa

$$T = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 1\}.$$

quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\int_0^1 v \log u dv \right) du = \frac{1}{4} \int_1^3 \log u du = 3 \log 3 - 2.$$

4. Calcolare

$$I = \int_P (3x - y)^2 \left(-\frac{x}{4} + \frac{y}{4} \right) dx dy,$$

dove P é il parallelogramma delimitato dalle rette $y = 3x$, $y = x$, $y = 3x - 1$ e $y = x + 4$.

Sol. Consideriamo il cambiamento di variabili invertibile $u = y - x$, $v = 3x - y$. L'insieme P diventa

$$T = \{(u, v) : u \in [0, 4], \quad v \in [0, 1]\},$$

il determinante della matrice Jacobiana é 2, perciò

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 v^2 dv \right) \left(\int_0^4 \frac{u}{4} du \right) = \frac{1}{3}.$$

5. Calcolare

$$I = \int_E x^2 (y - x^3) e^{y+x^3} dx dy,$$

dove $E = \{(x, y) : x^3 \leq y \leq 3, \quad x \geq 1\}$.

Sol. Introduciamo il cambiamento di variabili $u = y - x^3$, $v = y + x^3$. É chiaramente invertibile e la matrice Jacobiana ha determinante di modulo $6x^2$. Quindi l' insieme E nelle nuove coordinate diventa $T = \{(u, v) : u \in [0, 2], \quad u + 2 \leq v \leq -u + 6\}$ e l' integrale é

$$I = \frac{1}{6} \int_0^2 u \left(\int_{u+2}^{-u+6} e^v dv \right) du = \frac{1}{6} \int_0^2 u (e^6 e^{-u} - e^2 e^u) du.$$

Si conclude integrando per parti che $I = \frac{e^2}{6} (e^4 - 4e^2 - 1)$.

6. Disegnare l'insieme

$$C = \left\{ (x, y, z) : z \leq 2 - \frac{x^2 + y^2}{3}, \quad x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4 \right\}$$

e calcolare l'integrale triplo

$$\int_C (z-2) dx dy dz.$$

Sol. L'insieme C é di rotazione attorno all'asse z . L'insieme proiezione di C nel piano O, x, z é

$$E = \left\{ (x, z) : z \leq 2 - \frac{x^2}{3}, x^2 + (z-2)^2 \leq 4 \right\},$$

dove l'equazione $z = 2 - \frac{x^2}{3}$ rappresenta una parabola con asse z , di vertice $V(0, 2)$ e rivolta verso il basso, mentre $x^2 + (z-2)^2 = 4$ rappresenta una circonferenza di centro $C(0, 2)$ e raggio 2. E é dato dai punti (x, z) interni alla circonferenza che stanno sotto la parabola. Detta E^* la porzione di E contenuta nel primo quadrante, E^* risulta normale rispetto ad x :

$$E^* = \left\{ (x, z) : x \in [0, \sqrt{3}], 2 - \sqrt{4-x^2} \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{3} \right\}.$$

Quindi in coordinate cilindriche con asse z , cioé

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z, \end{cases}$$

l'insieme C diventa

$$T = \left\{ (\rho, \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, \sqrt{3}], 2 - \sqrt{4-\rho^2} \leq z \leq 2 - \frac{\rho^2}{3} \right\}.$$

Poiché il determinante della matrice Jacobiana é ρ , si ha

$$I = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\int_{2-\sqrt{4-\rho^2}}^{2-\frac{\rho^2}{3}} (z-2) dz \right) d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(-4 + \rho^2 + \frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = -\frac{13}{4}\pi.$$

7. Calcolare il volume ed il baricentro del solido dato da

$$S = \{(x, y, z) : y \geq 0, 8(x^2 + z^2) - 4y^2 \leq 1, x^2 + z^2 - y^2 \geq 0\}.$$

Sol. Poiché S é un solido di rotazione attorno all'asse y , determiniamo la proiezione E di S nel piano $0, x, y$. Si ha

$$E = \{(x, y) : y \geq 0, 8x^2 - 4y^2 \leq 1, x^2 \geq y^2\} = \{(x, y) : 8x^2 - 4y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq |x|\},$$

dove l'equazione $8x^2 - 4y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole. Detta E^* la porzione di E contenuta nel primo quadrante, possiamo rappresentare E^* come insieme normale rispetto ad y :

$$E^* = \left\{ (x, y) : y \in [0, 1/2], y \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2} \right\}.$$

Usando il Teorema di Guldino:

$$Vol(S) = 2\pi \int_{E^*} x dx dy = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\int_y^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}} x dx \right) dy = \pi \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{8}(1+4y^2) - y^2 \right] dy = \frac{\pi}{24}.$$

Per calcolare le coordinate del baricentro, dalla simmetria di S si deduce immediatamente che $x_G = 0 = z_G$. Resta dunque da calcolare solo $y_G = \frac{1}{Vol(S)} \int_S y \, dx \, dy \, dz$. Pensando di rappresentare S in coordinate cilindriche con asse y , cioè:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = y, \\ z = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

si ha (usando la rappresentazione di E^* ..) che il trasformato di S nelle nuove coordinate é

$$T = \left\{ (\rho, \theta, y) : \theta \in [0, 2\pi], \quad y \in [0, 1/2], \quad y \leq \rho \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4y^2} \right\}.$$

Poiché il determinante della matrice Jacobiana é ρ , si ottiene

$$y_G = \frac{24}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/2} y \left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4y^2}}^{\rho} \rho \, d\rho \right) dy \right) d\theta = 24 \int_0^{1/2} \left[\frac{y}{8} (1+4y^2) - y^3 \right] dy = \frac{3}{16}.$$

8. Calcolare il volume del solido ottenuto intersecando il cilindro di equazione $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Sol. Non si tratta di un solido di rotazione, ma essendo coinvolti una sfera ed un cilindro con asse l'asse delle z , é sempre conveniente operare un cambiamento di variabili passando alle coordinate cilindriche di asse z . Ragionando sulla proiezione dell'insieme nel piano O, x, y é facile dedurre che il solido dato, detto S , nelle nuove coordinate diventa:

$$T = \left\{ (\rho, \theta, z) : \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \rho \in [0, 2 \cos \theta], \quad -\sqrt{4-\rho^2} \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2} \right\}.$$

Allora,

$$Vol(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \theta} \rho \left(\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz \right) d\rho \right) d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \theta} \rho \sqrt{4-\rho^2} d\rho \right) d\theta.$$

Usando la solita sostituzione $t = 4 - \rho^2$ si ottiene

$$Vol(S) = \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - \cos^2 \theta)^{3/2}] d\theta.$$

Per simmetria, possiamo restringere l'integrale all'intervallo $[0, \pi/2]$ dove $\sin \theta \geq 0$ e quindi ci si riduce a calcolare (scrivendo $\sin^3 \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$ e ponendo $t = -\cos \theta$..)

$$Vol(S) = \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{32}{3} \left[\theta + \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$