Cenno delle soluzioni di alcuni esercizi su Estremi Vincolati.
a.a. 2010/2011

1. Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y) = e^{xy}$ su
$$E = \left\{(x,y): \ \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\right\}.$$
Cenno di sol. L'insieme é compatto e f ćontinua, quindi min e max assoluto esistono per W. $r \mapsto e^r$ é strettamente crescente, quindi basta studiare $g(x,y) = xy$. All'interno di E, $\nabla g(x,y) = (y,x) = (0,0)$ solo in $(0,0)$. Chiaramente g cambia segno intorno all'origine, quindi é sella. Sul bordo, la cosa piú semplice é usare i moltiplicatori di Lagrange: $H(x,y) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 1\right)$ ha $\nabla H(x,y,\lambda) = (y - \lambda x, x - \lambda 2y, \frac{x^2}{2} + y^2 - 1) = (0,0,0)$. Risolvendo, si ottengono i punti di massimo $(1, \sqrt{2}/2)$ e $(-1, -\sqrt{2}/2)$ e quelli di minimo $(1, -\sqrt{2}/2)$, $(-1, \sqrt{2}/2)$.

2. Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y) = (1 - x^2 - 4y^2)^2$ su
$$Q = \{(x,y): \ |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\}.$$
Determinare anche eventuali estremi locali.
Cenno di sol. L'insieme é compatto e f é continua, quindi min e max assoluto esistono per W. Nei punti interni a Q, $\nabla f(x,y) = (2(1 - x^2 - 4y^2)(-2x), 2(1 - x^2 - 4y^2)(-8y)) = (0,0)$ sull'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$ e in $(0,0)$. $f \geq 0$ e sull'ellisse vale 0, quindi si tratta di un insieme di punti di minimo assoluto. $f(0,0) = 1$. Parametrizzando il bordo, si ha $f(\pm 1, y) = 16y^4$ con $y \in [-1,1]$ che ha massimo in $y = \pm 1$ di valore 16, mentre $f(x, \pm 1) = (x^2 + 3)^2$ con $x \in [-1,1]$ ha minimo in $x = 0$ di valore 9 e massimo in $x = \pm 1$ di valore 16. In conclusione, il massimo assoluto viene assunto in $(\pm 1, \pm 1)$ e $(\pm 1, \mp 1)$ di valore 16.

3. Determinare la distanza dall'origine di $\mathbb{R}^3$ della circonferenza di centro $(1,1,1)$, raggio $R = 1$, contenuta nel piano $x + y = 2$.
Cenno di sol. Poiché dall'equazione del piano $y = 2 - x$, il problema consiste nel minimizzare la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (2 - x)^2 + z^2$ (distanza dall'origine alla seconda) con il vincolo $(x-1)^2 + (1-x)^2 + (z-1)^2 = 1$ (insieme compatto). Si pu´ usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e posto $H(x,z) = x^2 + (2-x)^2 + z^2 - \lambda[2(x-1)^2 + (z-1)^2 - 1]$ risolvere il sistema $\nabla H(x,z) = (0,0)$.

4. Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ su
$$T = \left\{(x,y): \ -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq x + \frac{\pi}{4}\right\}.$$
(Risultato: punto di massimo assoluto in $(0,0)$, punto di minimo assoluto $(\pi/4, \pi/2)$)

5. Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y,z) = x+y+z$ su $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2+xy \leq 1\}$.

   Cenno di sol. Poiché $\nabla f = (1,1,1)$ non ha zeri, il min e il max sono sul bordo dell'insieme (che é compatto). Si puó usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e posto $H(x,y,z) = x+y+z+\lambda[x^2+y^2+z^2+xy-1]$ risolvere il sistema $\nabla H(x,y,z) = (0,0,0,0)$.

6. i) Sia $L = \{(x,y) \mid x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Data $f(x,y) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)$, trovarne i massimi e i minimi assoluti su L.

   ii) Sia $S = \{(x,y,z) \mid x+y+z=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Data $g(x,y,z) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)$, trovarne i massimi e i minimi assoluti su S.

   Cenno di sol. i) Il vincolo si puó esplicitare come $y = 3-x$ con $x \in [0,3]$ (porzione della retta contenuta nel 1o quadrante). Basta sostituire in $f(x, 3-x)$ e si ottiene una funzione di una variabile.

   ii) Sostituendo $z = 3-(x+y)$, tenendo conto delle limitazioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z = 3-(x+y) \geq 0$ ci si trova a studiare $h(x,y) = f(x,y,3-x-y)$ nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,3)$ e $(3,0)$.

7. Trovare la minima distanza del punto P(0,0) da $\Gamma = \left\{(x,y) \mid (x-1)^3 - y^2 = 0\right\}$.

   Cenno di sol. La funzione da studiare é $f(x,y,z) = x^2+y^2$ con il vincolo dato da $(x-1)^3 = y^2$ che si puó sostituire in f e si ottiene $f(x,y,z) = x^2+(x-1)^3$. Attenzione al dominio: dal vincolo segue che $x-1 \geq 0$, cioé $x \in [1,+\infty[$.

8. Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y) = \arctan\left((x+3)^2+(y+2)^2\right)$ nel triangolo di vertici $A(-1,-3)$, $B(2,-3)$ e $C(2,0)$.

   Cenno di sol. Ci si puó limitare a studiare la funzione $g(x,y) = (x+3)^2+(y+2)^2$, perché $r \mapsto \arctan r$ é strettamente crescente. Si puó usare il metodo delle curve di livello, perché $(x+3)^2+(y+2)^2 = c$ per ogni $c > 0$ é una circonferenza di $K(-3,-2)$ e raggio $\sqrt{c}$. Per $c = 0$ si ha solo il centro K. Disegnando il triangolo si deduce che il minimo viene assunto sulla cf che passa per A e il massimo su quella che passa per C. Si trovano dunque i valori $m = 2^2+1 = 5$ e $M = 5^2+2^2 = 29$.

9. Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y) = x^y$ nell'insieme chiuso e limitato compreso tra le curve $x = y^2+1$ e $x = 5$.

   Cenno di sol. $f(x,y) = x^y = e^{y\log x}$ e ci si puó limitare a studiare la funzione $g(x,y) = y\log x$, perché $r \mapsto e^r$ é strettamente crescente. L'insieme assegnato ha $x \in [1,5]$, quindi é immediato verificare che $\nabla g(x,y) = (y/x, \log x) \neq (0,0)$ nei suoi punti interni. Sul bordo basta sostituire le due curve cartesiane: $g(y^2+1,y) = y\log(y^2+1)$ con $y \in [-2,2]$ e $g(5,y) = y\log 5$ con $y \in [-2,2]$ che sui rispettivi bordi valgono $\pm 2\log 5$. La prima curva ha deriva nulla per $y = 0$, dove g vale 0, mentre la derivata della seconda non é mai 0. $m = -2\log 5$ e $M = 2\log 5$.

10. Calcolare la distanza della retta $3x + 2y + 4 = 0$ dall'origine.

    Con entrambe i metodi consigliati, si ottiene che la distanza fra la retta e $(0,0)$ vale $\frac{1}{13}\sqrt{208}$ (corrispondente alla distanza fra $(0,0)$ e il punto di coordinate $(-\frac{12}{13}, -\frac{8}{13})$).

11. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x,y)$ soggetta al vincolo $g(x,y) = 0$ nei seguenti casi:

    (a) $f(x,y) = (x-y)^2, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$
    Il vincolo $g(x,y) = 0$ definisce un compatto, quindi f assume massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Inoltre $f \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$. Si trova che f ha massimo nei punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, ove vale 2. La funzione f ha invece minimo nei punti $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}))$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, ove vale 0.

    (b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \qquad g(x,y) = 3x + 4y - 25.$
    La funzione f non assume minimo sui punti della retta $g(x,y) = 0$ (ma tende asintoticamente a zero). Assume invece massimo nel punto $(3,4)$, ove vale e^{-25}.

    (c) $f(x,y) = xe^y, \qquad g(x,y) = e^y + x^2 - 3.$
    La funzione ha un massimo relativo in $(1, \log 2)$, ove vale 2, e un minimo relativo in $(-1, \log 2)$, ove vale -2.

    (d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3z^2, \qquad g(x,y) = x + y + z - 1.$
    La funzione data non ha massimo sul vincolo (perché, per esempio, sui punti della forma $(x, -x, 1)$, che appartengono al piano $g(x,y,z) = 0$, si ha $f(x,-x,1) = 2x^2 + 3 \to +\infty$). Ha invece un minimo nel punto $(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$.